



Denken in funktionalen Zusammenhängen

Funktionale Modellierung realer Probleme - unterstützt durch die Lernumgebung „Modellieren mit Mathe“

Hans Kratz, Willi van Lück und Antonius Warmeling
unter Mitwirkung von Marta Herbst Spöttl





Diese Schrift ist ebenfalls eine

**Didaktik der funktionalen und dynamischen Modellierung für den
Mathematikunterricht in den Sekundarstufen**

Sie wurde erstellt von

**Hans Kratz, Willi van Lück und Antonius Warmeling
unter Mitwirkung von Marta Herbst Spöttl**

Die Schrift ist als Download in der Lernumgebung „[Modellieren mit Mathe](#)“ verfügbar. Die Hyperlinks in dieser Fassung können direkt geöffnet werden. Liegt aber die Schrift ausgedruckt auf Papier vor, so ist die Adresse <http://www.blick.it/angebote/modellmathe/> mit der angegebenen Seitennummer einzugeben.

Copyright: Pädagogisches Institut für die deutsche Sprachgruppe des Landes Südtirol,
Bozen, 2010

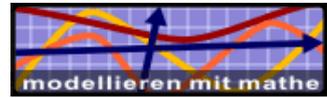
Inhalt

1. Einführung in die Lernumgebung „Modellieren mit Mathe“	9
2. Grundlegende Schritte der funktionalen Modellierung dargestellt am Beispiel von Armut und Reichtum in der Welt	13
2.1 Analysen zur Armut und zum Reichtum in unserer Industriegesellschaft	13
2.1.1 Auszüge aus Anforderungsbeschreibungen zum Problem	13
2.1.2 Vom ausgewählten Datenbestand zu graphischen Darstellungen	14
2.1.3 Approximation funktionaler Darstellungen mittels Trendfunktionen	15
2.1.4 Diskussion von Extrapolationen zu möglichen, zukünftigen Entwicklungen	16
2.1.5 Interpretationen zur Entwicklung von Armut und Reichtum in Industriegesellschaften	17
2.2 Analysen zur extremen Armut und von Hunger in Entwicklungsländern	18
2.2.1 Auszüge aus Anforderungsbeschreibungen zum Problem	18
2.2.2 Von ausgewählten Datensätzen zu Punkt-Linien-Diagrammen	18
2.2.3 Approximation der funktionalen Darstellungen mit Trendfunktionen	21
2.2.4 Diskussion von Extrapolationen zu möglichen, zukünftigen Entwicklungen	22
2.2.5 Interpretationen zur Entwicklung von Hunger und Armut in Entwicklungsländern ...	23
3. Skizze zur Begründung einer „Didaktik der dynamischen und funktionalen Modellierung“	25
3.1 Die Welt wird global, beschleunigt komplexer und vernetzter!	25
3.2 Herausforderungen für die Schule	26
3.3 Herausforderungen für den Mathematikunterricht	28
3.3.1 Prozessbezogene oder allgemeine Kompetenzen	29
3.3.2 Mathematisch inhaltliche Kompetenzen	33
3.3.3 Gegenüberstellung von funktionaler und dynamischer Modellierung.....	36
3.3.4 Widerstände gegen eine funktionale und dynamische Modellierung	37
3.4 Computerwerkzeuge zur funktionalen Analyse	38
4. Idealtypische Unterrichtsabläufe oder Szenarien	41
4.1 Die funktionale Modellierung in einem projektorientierten Mathematikunterricht	41
4.2 Die funktionale Modellierung in der Anwendungsphase des Mathematikunterrichts	49



5. Anwendungen der funktionalen Modellierung in der Anwendungsphase des Mathematik-Unterrichts	53
5.1 Anwendungen der linearen Funktion im Kontext des realen Problems: „Machtlos gegen Gewalt“	53
5.1.1 Einbettung der funktionalen Modellierungsarbeiten in einen anwendungsorientierten Unterrichtsablauf	53
5.1.2 Vom Datensatz zu Punkt-Diagrammen	55
5.1.3 Approximationen mit linearen Trendfunktionen.....	56
5.1.4 Tendaussagen zur Entwicklung der Zahl der Verurteilten	56
5.1.5 Eine „vorschnelle“ Interpretation der Entwicklungen.....	57
5.1.6 Berechnung und Darstellung der relativen Zahlen von Verurteilten	57
5.1.7 Eine erneute Interpretationen zur Entwicklung der Anzahl der Verurteilten	58
5.2 Anwendungen der linearen und quadratischen Funktion im Kontext des realen Problems: „Arbeit für alle !?!“	59
5.2.1 Einbettung der funktionalen Modellierungsarbeiten in einen anwendungsorientierten Unterrichtsablauf.....	60
5.2.2 Vom Datensatz zu Punkt-Diagrammen	61
5.2.3 Approximationen mit linearen und ganz rationalen Trendfunktionen	63
5.2.4 Tendaussagen zur Entwicklung der Arbeitslosenzahlen und -quoten	64
5.2.5 Streudiagramm von Wirtschaftswachstum und Arbeitslosenrate	65
5.2.6 Interpretationen zur Entwicklung der Zahl der Arbeitslosen	65
5.3 Anwendung der Differentialrechnung im Kontext des realen Problems „Artensterben – erschöpfte Natur?“	66
5.3.1 Einbettung der funktionalen Modellierungsarbeiten in einen anwendungsorientierten Unterrichtsablauf.....	67
5.3.2 Vom Datensatz zum Punkt-Diagramm	68
5.3.3 Approximationen mit ganz rationalen Trendfunktionen.....	69
5.3.4 Beschreibungen zum Verlauf der Abholzung	70
5.3.5 Tendaussagen zur Entwicklung der Abholzung	70
5.3.6 Interpretationen zur Entwicklung der Abholzung	71

6. Projektorientierte Einführung in die Exponentialfunktion im Kontext des realen Problems: „Klimawandel auf der Erde?“	73
6.1 Einbettungen der funktionalen Modellierungsarbeiten in einen projektorientierten Unterrichtsablauf	73
6.2 Vom Datensatz zu Punkt-Diagrammen	76
6.3 Approximationen zu CO ₂ -Emission mit Trendfunktionen.....	77
6.4 Trendaussagen zu CO ₂ -Entwicklungen in der „nahen“ Zukunft.....	77
6.5 Entwicklung, Approximation und Extrapolation der mittleren Erdtemperatur	78
6.6 Streudiagramm zur CO ₂ -Emission und der mittleren Erdtemperatur	80
6.7 Interpretationen zu den Entwicklungen	80
7. Skizzen für selbstreguliertes Forschen mit funktionaler und dynamischer Modellierung – Projektthema: Wachstum, Wachstum ... über alles!?	83
7.1 Diskussion des Projektthemas und Entscheidung für interessenbezogene funktionale und dynamische Modellierungen an Teilproblemen	83
7.2 Weltbevölkerung und Welternährung – grenzenlos wachsend?	85
7.3 Arbeitsplatzangebot und Bruttosozialprodukt – Immer mehr und immer höher?	85
7.4 Kapital, Konsum und Investition – immer noch gieriger?	86
7.5 Volkseinkommen in Abhängigkeit von Konsum und Investition – immer noch höher!?...	86
7.6 Ausreichende Ernährung durch nachhaltige Flächenentwicklung? Überlegungen am Beispiel der Subsahara-Zone	86
7.7 Energiebedarf der Menschheit immer noch wachsend! – Aber: humanverträgliche und klimafreundliche Energieumwandlung?	87
7.8 Selbstvergiftungen an Müll oder nachhaltiges Müllmanagement?	87



Vorwort und Einstimmung in die funktionale Modellierung

„Mathematische Grundbildung umfasst die Fähigkeit, die Rolle zu erkennen, die Mathematik in der Welt spielt, mathematisches Wissen funktional, flexibel und mit Einsicht zur Bearbeitung vielfältiger kontextbezogener Probleme einzusetzen und begründete Urteile abzugeben.“ (Bildungsstandards, KMK Deutschland; 2004).

Der Mathematikunterricht ist heute in der Regel noch an eine Vorstellung gefesselt, die fast ausschließlich den durchaus wichtigen, kulturellen Wert der „reinen Mathematik“ betont. Der Unterricht orientiert sich an der mathematischen Fachsystematik. Und daran ändern auch die in Schulbüchern hin und wieder eingestreuten Anwendungsaufgaben fast nichts. Denn sie spiegeln in der Regel nur eine konstruierte Realität wider, die mit der wirklichen wenig zu tun hat.

Der Mathematikunterricht sollte sich daher, neben der notwendigen Systematik, u. a. auch mit funktionaler und dynamischer Modellierung von realen Problemen auseinander setzen. Dabei werden:

- schrittweise sowohl inhaltliche als auch allgemeine mathematische Kompetenzen vermittelt,
- durch handlungsorientierte Anwendungen und projektorientierte Einführungen sowie in fächerübergreifenden Projekten zunehmend mehr die Interessen der Lernenden berücksichtigt und
- selbstreguliertes und selbstverantwortetes Lernen gefördert.

Dies wird in den folgenden zwei Schriften (pdf-Dokumenten) verdeutlicht:

- Denken in Netzen – systemisch Denken: Dynamische Modellierung realer Probleme
- Denken in funktionalen Zusammenhängen: Funktionale Modellierung realer Probleme

Die hier vorliegende Schrift gibt Anregungen zur funktionalen Modellierung. Dabei geht es darum, den Prozess der Modellierung u.a. mit linearen, quadratischen oder exponentiellen Funktionen **in den Kapiteln 2, 5 und 6** erfahrbar zu machen. Von realen Datensätzen ausgehend werden Zusammenhänge zunächst in Punkt-Diagrammen dargestellt, deren Verläufe dann durch Trend-Funktionen approximiert werden. Extrapolationen erlauben dann Aussagen über mögliche zukünftige Entwicklungen, die schließlich im Kontext eines realen Problems interpretiert werden. Ein Forschungs-Projekt für Schülerinnen und Schüler, das parallel funktionale und dynamische Modellierungsansätze erlaubt, wird in **Kapitel 7** skizziert. Bei allen Modellierungen werden Blicke über den Tellerrand der Mathematik hinaus notwendig. Mathematiklehrerinnen und -lehrer sind dann als kompetente Laien gefragt.

Mittels funktionaler und dynamischer Modellierung sollte der Mathematikunterricht für die immer komplexer und vernetzter werdende Lebenswirklichkeit wichtige Erkenntnishilfen von



emanzipatorischer Bedeutung anbieten. Diese Herausforderung an Schule und Mathematikunterricht wird im **Kapitel 3** „Didaktik der funktionalen und dynamischen Modellierung“ ausführlich begründet und mit den Anforderungen in den Rahmenrichtlinien belegt. Insbesondere im **Kapitel 3.3** wird dann deutlich gezeigt, dass der zukünftige Mathematikunterricht vor der Aufgabe einer Neuorientierung steht und welche inhaltlichen und allgemeinen Kompetenzen Schülerinnen und Schüler bei einer funktionalen und dynamischen Modellierung erwerben können.

Die Lernumgebungen „Modellieren mit Mathe“ (MMM) und auch „Mathe überall“ (MÜ) bieten für einen solchen Unterricht eine Fülle an Anregungen, mathematischen Hilfen und auch Unterrichtsvorschlägen. In **Kapitel 1** wird in aller Kürze die mächtige, hypermediale Lernumgebung MMM vorgestellt. Die Lernumgebung MÜ ist in derselben Weise strukturiert. Eine vertiefte Einarbeitung muss selbstreguliert vorgenommen werden. Dabei hilft eine „guided tour“.

Im **Kapitel 2** wird schrittweise in den Prozess der funktionalen Modellierung eingeführt. Am Beispiel von möglichen Analysen zur „Armut und zum Reichtum in Industrie- und Entwicklungsländern“ werden die grundlegenden Schritte der funktionalen Modellierung ausführlich beschrieben. Diese Beschreibung konzentriert sich auf den Prozess und nicht auf unterrichtliche Schritte. Sie werden im **Kapitel 4** prototypisch skizziert.

Alle Beispiele in dieser Schrift sollen Lehrkräfte befähigen, funktionale und dynamische Modellierungen selbstreguliert durchzuführen, um so mittels eigener Erfahrungen die Voraussetzungen für deren Vermittlung zu erwerben.

*Marta Herbst-Spöttl, Hans Kratz,
Willi van Lück und Antonius Warmeling*

1. Einführung in die Lernumgebung „Modellieren mit Mathe“

Die Lernumgebung „[Modellieren mit Mathe](http://www.blikk.it/angebote/modellmathe)“ (kurz: MMM) ist ein hochvernetztes, hierarchisch strukturiertes Informations- und Arbeitsmedium, das kostenlos im Internet (<http://www.blikk.it/angebote/modellmathe>) erreichbar ist. Die Klapp-Bilder im Eingangsportal führen zu zehn Wirklichkeitsbereichen, in denen zurzeit insgesamt 33 reale Probleme aufbereitet sind. Ihre Behandlung im Mathematikunterricht erfordert für Lehrkräfte keine zusätzliche didaktische Aufbereitung. Das Bild in der Mitte führt zu mathematischen Hilfen, die in neun Bereichen fachsystematisch geordnet sind.

Eingangsportal: Modellieren mit Mathe

Aktuelle Übersicht:

- [über alle aufbereiteten realen Probleme](#)
- [über die erlernbare Mathematik bei Modellierungen an realen Problemen](#)

Anregungen für Lehrerinnen und Lehrer:

- [Guided Tour zur Nutzung der Lernumgebung im „herkömmlichen“ Mathematik-Unterricht](#)
- [Downloads zur funktionalen und dynamischen Modellierung](#)
- [Didaktische, methodische und lerntheoretische Anregungen u.a. mit Unterrichtsbeschreibungen](#)
- [Internationale Projektzeiten](#)

Reale Probleme aus zehn Wirklichkeitsbereichen

- Gesellschaft und Politik
- Wirtschaft und Finanzen
- Entwicklung und Ausgleich
- Ökologie und Landwirtschaft
- Straßen, Brücken und Hausbau
- Verkehr und Mobilität
- Physik, Chemie und Technik
- Sport und Freizeit
- Biologie und Technik
- Gesundheit und Medizin

Mathematische Hilfen

- [Guided Tour für Schülerinnen und Schüler zur Nutzung dieser Lernumgebung](#)
- [Anregungen zur Nutzung Neuer Medien](#)

Letzte Änderung: 07.04.2010
© Pädagogisches Institut für die deutsche Sprachgruppe - Bozen, 2000 - 2010

Die gelb unterlegten „Eingänge“ für Lehrkräfte führen u.a. zu einer „Guided Tour zur Nutzung der Lernumgebung im ‚herkömmlichen‘ Mathematikunterricht“, **zum Download dieser Schrift** sowie zu „Didaktische, methodische und lerntheoretische Anregungen **mit vielen Unterrichtsbeschreibungen**“. Alle „Elemente“ in diesen drei großen Hierarchien der Lernumgebung sind vielfach miteinander verlinkt.

Die [oberste Sitemap](#) (sitemap.htm) beschreibt die Struktur und den Inhalt dieser Lernumgebung ausführlicher und macht auch mit ihrer Navigation vertraut. Werden in den folgenden Ausführungen Seiten aus der Lernumgebung zitiert, so sind diese in der digitalen Fassung direkt mit der Lernumgebung verlinkt.

Am Beispiel eines realen Problems – alle realen Probleme sind in derselben Weise aufgebaut - soll die inhaltliche Struktur hier schon etwas verdeutlicht werden: Ein Klick im Eingangsportal auf den Wirklichkeitsbereich „**Entwicklung und Ausgleich**“ (ma0300.htm) öffnet eine (Verteiler-)Seite, auf der alle realen Probleme kurz beschrieben sind, die für diesen Wirklichkeitsbereich bisher aufbereitet wurden. Ein weiterer Klick auf „[Extreme Armut - ‚Hunger‘ lebenslänglich?](#)“ (ma0330.htm) öffnet dann die folgende **Eingangsseite**, die hier auszugsweise dargestellt wird.

+++ 8.000 Kinder sterben weltweit pro Tag an den Folgen von Hunger. (UNICEF 2007) +++

In den armen Ländern steigen die Schulden. Und die extreme Armut vieler ihrer Menschen führt zur Fehl- und Unterernährung. Dies wiederum reduziert die Leistungsfähigkeit und führt zu einer geringeren Produktivität und somit auch zu höheren Schulden und niedrigeren Einkommen. Die Zusammenhänge sind keine Monokausalitäten: Es sind Teufelskreise, die schicksalhaft Armut sowie "Hunger lebenslänglich" gebären!



Schicksal Armut?

[< mögliche Bild-Diskussionen und "Gesichter des Hungers" zum Einstieg in die Thematik](#)

Wenn es gewünscht wird, gibt es hier weitere Informationen zur Sache und auch einige Zahlen und Datenbestände



["Blicke" auf die vernetzte Schulden- und Hunger-Problematik in den "armen Ländern"](#)

[Extreme Armut, Hunger & Unterernährung, Ernährungssituation & notwendige Energie Der Teufelskreis der Armut](#)

[Schuldenentwicklung und Schuldendienste - Entwicklungshilfe](#)

[Kommentierte Lexika und Links ins Internet - eine Auswahl](#)

Das reale Problem ist überarbeitet worden in Zusammenarbeit mit

Arbeitsanregungen für Jugendliche, die mit dem Modellieren beginnen

Mögliche Fragen

 [Die Schuldenberge steigen, wie? Armut bringt permanenten Hunger und hat weitere Folgen, welche?](#)

Mögliche mathematische Modellierungen

 [Analysiert die Verschuldung der "armen Länder" und die Folgen der extremen Armut](#)

 [Konstruiert und simuliert die Dynamik in den Teufelskreisen von Schulden, Armut und Hunger](#)

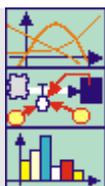
 [Gestaltet eine Befragung u.a. zu einem Erlass der Schulden in den ärmsten Ländern](#)

Anregungen zum selbstregulierten Lernen

[Lerntagebuch: Formular zur Selbstorganisation des Lernens](#)

[Exemplarische Arbeitsergebnisse von SchülerInnen](#)

In der rechten Spalte dieser Eingangsseite werden Sachinformationen und Datenbestände zum Sachverhalt angeboten. In der mittleren Spalte werden mögliche Fragen zum realen Problem formuliert, die Lernende diskutieren und denen sie dann nachgehen können. Und passend zu diesen Fragebereichen gibt es bei jedem realen Problem immer die drei folgenden Modellierungsansätze:



- Funktionale Analyse von Zusammenhängen – funktionale Modellierung
- Konstruktion und Simulation dynamischer Modelle – dynamische Modellierung
- Gestaltung und Auswertung einer Befragung – statistische Modellierung

Ein Klick führt zu den Anforderungsseiten. Die Icons weisen immer auf den entsprechenden Modellierungsansatz hin.

Ein Klick z.B. auf [„Analysiert die Verschuldung der „armen Länder“ und die Folgen der extremen Armut“](#) im oben dargestellten realen Problem führt zu einer Seite (ma0337.htm), die hier ebenfalls nur in einem Ausschnitt gezeigt wird.

In der mittleren, weiß unterlegten Spalte dieser Seite werden Anforderungen an die Jugendlichen beschrieben. In der rechten Spalte werden ihnen dazu mathematische Hilfen zur Lösung angeboten.

<p>Analyse der extremen Verschuldung gegenüber der Entwicklungshilfe</p> <p>Analyse der extremen Armut, des Hungers, der Unterernährung und deren Folgen</p>	<p>Extreme Verschuldungen gibt es speziell in den Highly Indebted Poor Countries. Zur Verschuldung in den Entwicklungsländern und zur Entwicklungshilfe sind euch einige Daten gegeben. Analyse kann hier u.a. bedeuten:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Erstellt zur Entwicklung der Schulden/Schuldendienste und der Entwicklungshilfe passende Diagramme. • Recherchiert selbstständig aktuelle Daten hinzu. Fragt euch, wie seriös die Daten sind. • Diskutiert in eurer Kleingruppe und begründet, welche Diagrammformen für die Darstellung von Entwicklungen sinnvoll sind. • Beschreibt mit Worten den Verlauf der Diagramme und interpretiert den Verlauf. • Findet Terme, die ggf. stückweise den Verlauf beschreiben. • Diskutiert miteinander und berechnet für die Schulden und die Entwicklungshilfe eine Prognose in 5 bis 10 Jahren. Dazu könnt ihr die gefundenen Terme nutzen, müsst aber Szenarien entwickeln. • Diskutiert miteinander, wie sicher die Prognose ist. • Vergleicht die Diagramme zur Entwicklung der Schulden mit denen der Entwicklungshilfe und diskutiert in eurer Kleingruppe, ob mit der momentanen Entwicklungshilfe der "Hunger" beseitigt werden kann. • Recherchiert von einigen "armen" Ländern die Bruttonationaleinkommen und die Schulden, berechnet jeweils die Verschuldungsquoten und erstellt Diagramme. • Diskutiert in eurer Kleingruppe, was euch dieses Diagramme (im Unterschied zu dem obigen) sagen. • Verschriftlicht eure Ergebnisse und erstellt eine Präsentation. <p>In den Low Income Countries wie in den Highly Indebted Poor Countries fehlt den Familien vielfach das Geld für eine ausreichende oder gar ausgewogene Ernährung. Die Armut ist dauerhaft und mit ihr der extreme Hunger. Analyse kann hier u.a. bedeuten:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Erstellt zu den Mini-Einkommen in ausgewählten Ländern und Länderbereichen der Erde jeweils Punkt-Diagramme. • Findet Terme, die den Verlauf der Entwicklungen beschreiben und interpretiert den Verlauf der Entwicklungen. • Prognostiziert die Entwicklungen in den nächsten 5 bis 10 Jahren. Dazu könnt ihr die gefundenen Terme nutzen, müsst aber Szenarien entwickeln. • Diskutiert miteinander, wie sicher bzw. unsicher die Prognosen sind. 	<p>Zur Bearbeitung der Anforderungen (Aufgaben) gibt es für euch die folgenden mathematischen Hilfen (blau unterlegt) und Werkzeughilfen (grün unterlegt):</p> <p>Mögliche Hilfen für die Klassenstufen 8 bis 10</p> <p>Datenauswertung: Diagramme</p> <p>Mehr zu den Begriffen: Bruttoinland- und Bruttosozialprodukte</p> <p>Dynamisches Wachstum ...</p> <p>Potentielle Energie in der menschlichen Nahrung</p> <p>Versprachlichung von linearen, quadratischen & rationalen, exponentiellen & logistischen Wachstumsprozessen</p> <p>Exponentialfunktionen - Systematisierung mit Verweisen auf Parameteruntersuchungen</p> <p>Modellierungen zur Unsicherheit einer Prognose</p> <p>Blicke in Zukunft ...: Approximation, Extrapolation, Prognose</p>
--	--	---

Wollen Schülerinnen und Schülern mathematische Hilfen, etwa zur [„Versprachlichung von linearen Wachstumsprozessen“](#) (ma3600.htm) oder zu [„Modellierungen zur Unsicherheit einer Prognose“](#) (ma6820.htm), so können sie diese mit einem Klick auf den Kasten aufrufen.

Alle mathematischen Hilfen werden unter fachsystematischen Gesichtspunkten in Funktionsklassen gebündelt. Die Seite, auf der die bisher ausgearbeiteten mathematischen Hilfen zur Anwendung von [linearen Funktionen](#) (ma3200.htm) zusammengefasst sind, wird hier ebenfalls in einem Ausschnitt gezeigt.

mathematischen Hilfen beziehen sich auf reale Probleme aus den zehn Wirklichkeitsbereichen.

Sie unterstützen euch bei der Beantwortung von Fragen, die sich bei einer Analyse, Modellierung, Extrapolation und Prognose mit Hilfe von linearen Funktionen ergeben.



Arbeitsanregungen zum Systematisieren und Anwenden

Beim mathematischen Modellieren von realen Problemen habt ihr lineare Abhängigkeiten zwischen Größen entdeckt und auch "versprachlicht". In der Folge werden die gemeinsamen Strukturen systematisiert und mit weiteren Anwendungen angereichert. Auch auf Materialien im WWW wird verwiesen.

mathematische Hilfen zum Schlussrechnen und zu linearen Funktionen

Vom Zweisatz zum Dreisatz	Weg-Zeit und Zeit-Weg-Abhängigkeiten	Zinsrechnen Berechnen der Zinsen
Dreisatz: Bruchstrichverfahren und Tabellenverfahren	Zeit-Weg-Abhängigkeit für Züge von Lamarin nach Adin	Berechnen der Zinsezinsen
Prozentrechnen	Zeit-Weg-Abhängigkeit für Züge von Adin nach Lamarin	Berechnen des Kapitals und des Zinssatzes
Berechnen des Prozentwertes	Energiesparlampen kontra Glühlampen	Leerformular NxxNxxN
Berechnen des Grundwertes	Weg-Zeit-Diagramm bei "stückweise" konstanten Geschwindigkeiten	Sparsumme in Abhängigkeit von der Zeit (Sparstrumpfmodell)
Berechnen des Prozentsatzes	Leistung, Arbeit und Zeit in Abhängigkeit voneinander	Kalkulation der Kosten für eine Klassenfahrt
Umrechnen von Währungen	Visionen von Cyber-Wesen	Kalkulation bei einem Einzelhändler
Kosten in Abhängigkeit von der Menge	Leerformular NxxNxxN	Kalkulation von Handy-Kosten

Versprachlichung von linearen Abhängigkeiten und Zusammenhängen

Lineare Abhängigkeiten

Lineares Wachstum

Lineare Funktionen - Systematisierungen

Geradenscharen mit Derive

Schnittpunkte von Geraden mit Derive

Suchen von Geradengleichungen mit Derive

BLK-Modellversuch SeLMA:

Lineare Funktionen und ihre Graphen

Lineares Optimieren - Materialien zum Selbstlernen und Anwenden

Entsprechende Bündelungsseiten gibt es z.B. zu [quadratischen Funktionen](#) (ma3800.htm) und [exponentiellen Funktionen](#) (ma4400.htm). Die Übersicht zu den insgesamt neun mathematischen Bündelungs-Bereichen ist auf der Eingangsseite der Lernumgebung mit dem Bild in der Mitte verlinkt.

Alle zu einem realen Problem aufbereiteten Seiten werden jeweils in einer zu diesem Problem passenden sitemap (hier: [ma0331.htm](#)) zusammengefasst.

2. Grundlegende Schritte der funktionalen Modellierung dargestellt am Beispiel von Armut und Reichtum in der Welt

In den beiden realen Problemen „[Werden die Reichen immer reicher?](#)“ (ma0230.htm) und „[Extreme Armut ‚Hunger‘ lebenslänglich?](#)“ (ma0330.htm) sind auf den Seiten „[Analysiert u.a. Entwicklungen von Reichtum und Armut in unserer Gesellschaft](#)“ (ma0237.htm) und „[Analysiert die Verschuldung der ‚armen Länder‘ und die Folgen der extremen Armut](#)“ (ma0337.htm) Anforderungen für funktionale Modellierungen auf der Grundlage von Datensätzen formuliert. An zwei Anforderungsbeispielen wird in den folgenden Ausführungen eine mögliche funktionale Modellierung beschrieben. Sie steht in diesem Kapitel im Vordergrund und nicht die Beschreibung eines möglichen Unterrichtsverlaufs.

2.1 Analysen zur Armut und zum Reichtum in unserer Industriegesellschaft



Bilder aus unserer Gesellschaft

2.1.1 Auszüge aus [Anforderungsbeschreibungen](#) zum Problem (ma0237.htm#Gruppe1)

1. Erstellt Diagramme zur Entwicklung von Armut und Reichtum (sowie zur Verteilung von Armut und Reichtum in unserer Gesellschaft).
2. Diskutiert in eurer Kleingruppe und begründet, welche Diagrammformen für die Darstellung von Entwicklungen sinnvoll sind.
3. Findet Terme, die den Verlauf beschreiben und vergleicht die Entwicklungen.
4. Erstellt eine Prognose zu Armut und Reichtum in 4, 9, 14, ... Jahren und diskutiert ihre Unsicherheit. Dazu könnt ihr die gefundenen Terme nutzen, müsst aber Szenarien entwickeln.

Eine **vollständige Lösung** mit Verlinkungen auf das reale Problem, auf die erwerbbaeren Kompetenzen sowie auf die interaktiven ExcelMappen kann in MMM auf der Seite „[Analysen zur Entwicklung von Armut und Reichtum in unserer Gesellschaft](#)“ (ma1236a.htm) eingesehen werden.

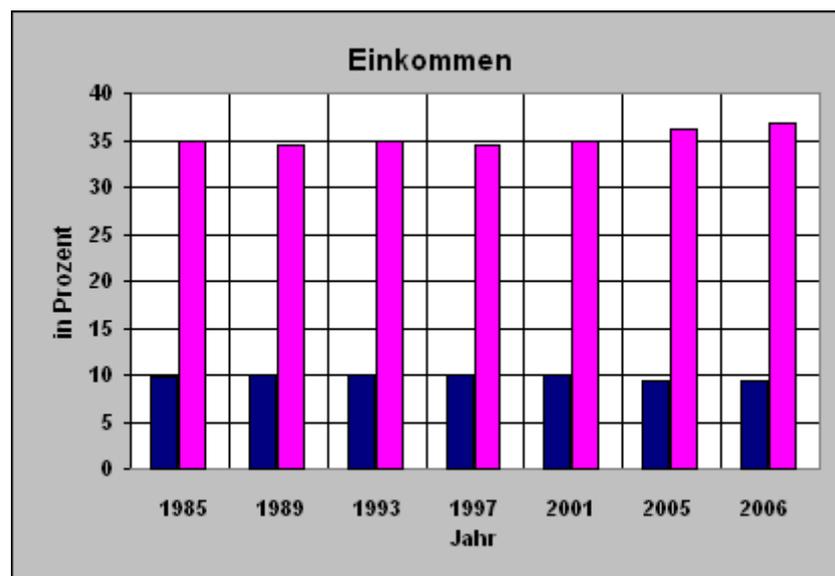
2.1.2 Vom ausgewählten Datenbestand zu graphischen Darstellungen

Hier wird nur der folgende Datenbestand oder Datensatz als Beispiel genommen und funktional analysiert. Viele weitere Datensätze sind auf den Seiten [Daten zur „Armut“ und zum „Reichtum“](#) (ma0234.htm) sowie [Daten zu Einkommen und zu Einkommensverteilungen](#) (ma0235.htm) vorgegeben und müssten zur Vervollständigung der Interpretation von Armut und Reichtum in unserer Gesellschaft ebenfalls funktional analysiert und bewertet werden.

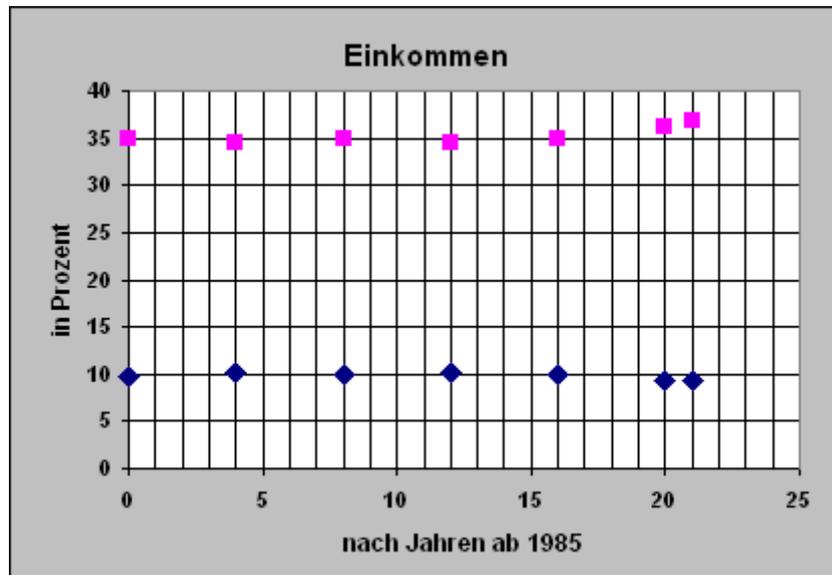
Nach Jahren	Jahr	Haushaltsnettoeinkommen der privaten Haushalte in Deutschland pro Monat in €	Einkommen gemessen am Gesamteinkommen in Prozent	
			Ärmste 20%	Reichste 20 %
0	1985	802	9,7	35,0
4	1989	937	10,1	34,5
8	1993	1088	9,9	34,9
12	1997	1195	10,1	34,4
16	2001	1316	9,9	34,9
20	2005	1409	9,4	36,1
21	2006	1437	9,3	36,8

Quelle: Veröffentlichung des DIW von J. Goebel, R. Habich und P. Krause; Datenreport 2008

Stellt man die Entwicklung der Einkommen in Deutschland in der unteren und oberen 20%-Gruppe als Balkendiagramm dar, so ergibt sich ein verzerrtes Bild, weil die Zeitabstände unterschiedlich sind.



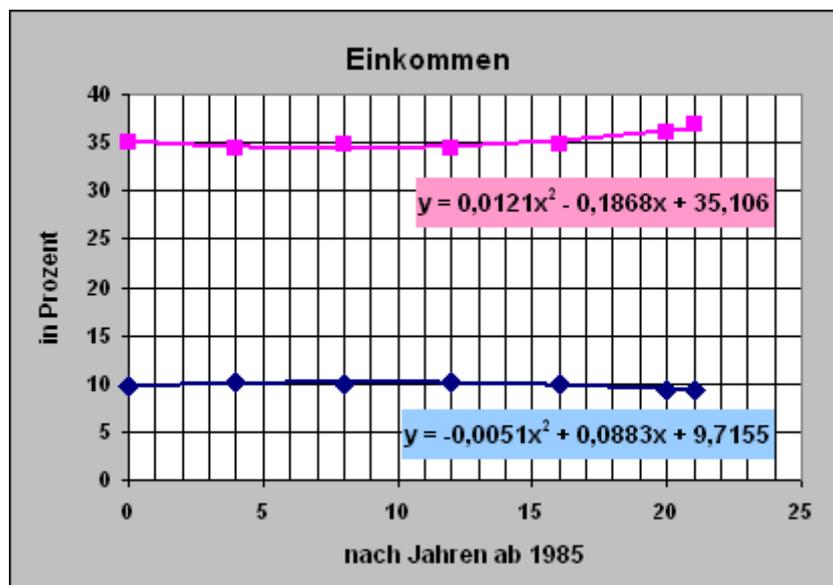
Das folgende Punktdiagramm zeigt die zeitliche Entwicklung deutlicher.



Blaue Raute = untere 20%Gruppe; lila Quadrat = obere 20%Gruppe

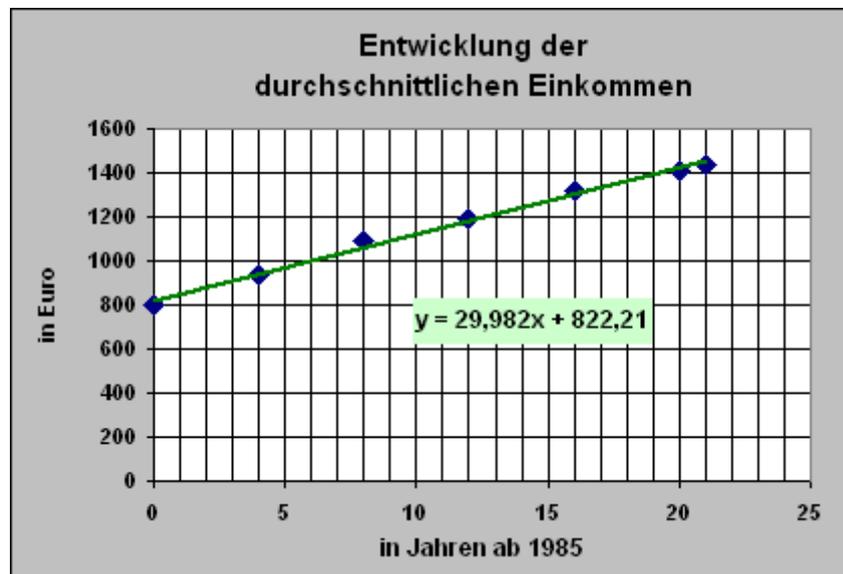
Anmerkung: Auf der Rechtsachse (x-Achse) werden die Zeitabstände nach dem Jahr 1985 abgetragen, weil sie in funktionalen Approximationen als x-Koordinaten auftreten und so bei folgenden Extrapolationen genutzt werden können.

2.1.3 Approximation funktionaler Darstellungen mittels Trendfunktionen



Der Verlauf der Punkte in den beiden Punktdarstellungen lässt sich mit Hilfe von Excel durch lineare und auch quadratische Trendlinien bzw. Trendfunktionen approximieren. Als Beispiel werden hier aber nur die quadratischen Approximationen für die Einkommen in der oberen und unteren 20%-Gruppe dargestellt.

Die Entwicklung der durchschnittlichen, monatlichen Haushaltsnettoeinkommen der privaten Haushalte wird hier nur linear approximiert dargestellt.



Anmerkung: Für Anfänger im Umgang mit Excel gibt es in der Lernumgebung MMM [Crash-Kurse](#) ([ma9050.htm](#)) u.a. zum Anlegen einer Excel-Tabelle, zur Darstellung in Diagrammen und zur Darstellung von Trendfunktionen (mehr zu Programmen zur Analyse von Zusammenhängen im Kapitel 3.3.4).

2.1.4 Diskussion von Extrapolationen zu möglichen, zukünftigen Entwicklungen

Für die Diskussion der folgenden Extrapolationen werden die quadratischen und linearen Approximationen - sowohl der Entwicklungen zum Einkommen in der oberen und unteren 20%Gruppe als auch der Entwicklung der privaten Haushaltseinkommen – gewählt und als zwei unterschiedliche Szenarien gedeutet.

nach Jahren	Einkommen		obere 20%-Gruppe		untere 20%-Gruppe	
	quadratische	lineare	quadratische	lineare	quadratische	lineare
	Prognose in €		Prognose in %		Prognose in %	
25	1521	1572	38	36	8,7	9,5
30	1612	1722	40	37	7,8	9,3
35	1685	1872	43	37	6,6	9,2

Auf der Grundlage der linearen und quadratischen Approximationen werden die Trends für die nächsten Jahre berechnet. Alle Trendberechnungen für die nächsten 4, 9 und 14 Jahre sind in der vorstehenden Tabelle dargestellt.

Aber: Sie haben nur dann für die allernächste Zukunft eine gewisse Gültigkeit, wenn keine zeitnahen, politischen Entscheidungen getroffen werden, die Entwicklungen gegen den Trend begünstigen.

Die Unsicherheit der Prognose wird etwa in der Differenz der Zahlen von linearer und quadratischer „Hochrechnung“ deutlich. Sie wird mit den Jahren immer größer. Somit wird deutlich, dass Prognosen, die auf einer derartigen Modellierung beruhen, über längere Zeiträume nicht sinnvoll sind.

2.1.5 Interpretationen zur Entwicklung von Armut und Reichtum in Industriegesellschaften

Trotz der Unsicherheiten in den Prognosen interpretieren wir die Entwicklungen mit aller Vorsicht wie folgt: Die Schere zwischen der oberen und unteren 20%-Gruppe öffnete sich in der Vergangenheit und öffnet sich auch weiterhin. Nur die obere 20%-Gruppe profitiert von der Zunahme der durchschnittlichen monatlichen Gesamtnettoeinkommen.

Eine weitere Analyse, die auf der Grundlage weiterer Datenbestände zur Verteilung von Armut und Reichtum in unserer Gesellschaft durchgeführt werden kann [siehe in MMM die Seite [„Analysen u.a. zu Schichtungen in unserer Gesellschaft und zu möglichen Trendwenden der Armut“](#) (ma1237.htm)], bestätigt diese Interpretation. Sie sagt zusätzlich aber auch noch:

- Der Bevölkerungsanteil mit „prekärer Wohlstand“ nimmt zu.
- Der Bevölkerungsanteil mit „mittlerem Wohlstand“ nimmt ab.
- Der Bevölkerungsanteil mit „höherem Wohlstand“ nimmt zu.

2.2 Analysen zur extremen Armut und von Hunger in Entwicklungsländern



Bilder aus unterschiedlichen Regionen der Welt

2.2.1 Auszüge aus [Anforderungsbeschreibungen](#) zum Problem (ma0337.htm#Gruppe2)

1. Erstellt zu den Mini-Einkommen in ausgewählten Entwicklungsländern und Länderbereichen der Erde jeweils Punkt-Diagramme.
2. Findet Terme, die den Verlauf der Entwicklungen beschreiben und interpretiert den Verlauf der Entwicklungen.
3. Prognostiziert die Entwicklungen in den nächsten 5 bis 10 Jahren. Dazu könnt ihr die gefundenen Terme nutzen, müsst aber Szenarien entwickeln.
4. Diskutiert miteinander, wie sicher bzw. unsicher die Prognosen sind.
5. Diskutiert in eurer Kleingruppe die Folgen einer ständigen Unterernährung.

Eine **vollständige Lösung** mit Verlinkungen auf das reale Problem, auf die dabei erwerbbaeren Kompetenzen sowie auf die ExcelMappen kann in MMM auf Seite „[Analyse der extremen Armut, des Hungers, der Unterernährung und deren Folgen](#)“ (ma1337.htm) eingesehen werden.

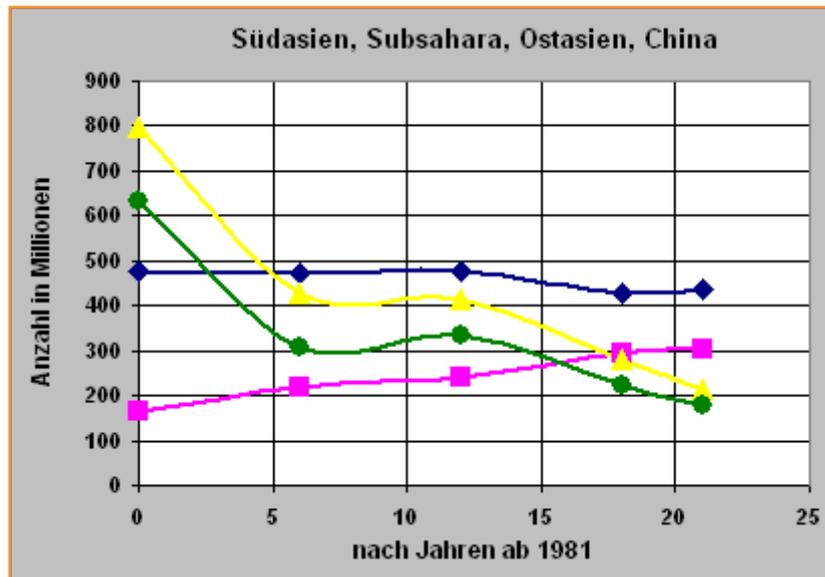
2.2.2 Von ausgewählten Datensätzen zu Punkt-Linien-Diagrammen

Hier werden nur die zwei folgenden Datensätze als Beispiel genommen und funktional analysiert. (Quelle der Daten: Bundeszentrale für politische Bildung)

Viele weitere Datensätze sind u.a. auf der Seite [Extreme Armut, Hunger und Unterernährung](#) (ma0334a.htm) vorgegeben. Diese Datenbestände müssten zusätzlich auch noch analysiert und bewertet werden.

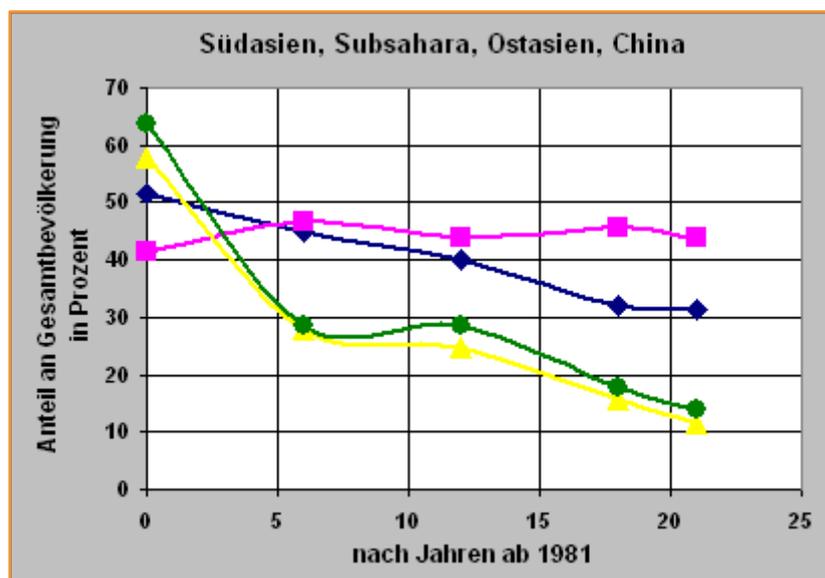
Anzahl der Personen in Haushalten mit einem Einkommen unter 1 US-Dollar (Kaufkraft) pro Tag und Kopf, in Millionen					
	1981	1987	1993	1999	2002
Welt	1.482	1.171	1.208	1.096	1.015
Südasien	475	473	476	429	437
subsaharisches Afrika	164	219	242	294	303
Ostasien und Pazifik	796	426	415	282	214
Lateinamerika&Karibik	36	45	52	54	47
NaherOsten&Nordafrika	9	7	4	8	5
China	634	308	334	223	180
Anteil der Personen an der Gesamtbevölkerung, die mit 1 US\$ pro Tag auskommen müssen, in Prozent					
	1981	1987	1993	1999	2002
Welt	40,4	28,4	26,3	21,8	19,4
Südasien	51,5	45,0	40,1	32,2	31,2
subsaharisches Afrika	41,6	46,8	44,0	45,7	44,0
Ostasien und Pazifik	57,7	28,0	24,9	15,7	11,6
Lateinamerika&Karibik	9,7	10,9	11,3	10,5	8,9
NaherOsten&Nordafrika	5,1	3,2	1,6	2,6	1,6
China	63,8	28,5	28,4	17,8	14,0

Für die ausgewählten Regionen oder Länder Südasien, Subsahara-Zone, Ostasien und China werden jeweils Punkt-Linien-Diagramme erstellt, die die Anzahl von Menschen zeigen, die mit weniger als 1 US\$ pro Tag und Kopf auskommen müssen.



(Südasien = Raute; Subsahara = Quadrat; Ostasien = Dreieck; China = Kreis)

Für dieselben Länder erstellen wir Punkt-Linien-Diagramme, die den Prozentanteil der Bevölkerungen aufzeigen, die mit 1 US\$ pro Tag auskommen müssen.



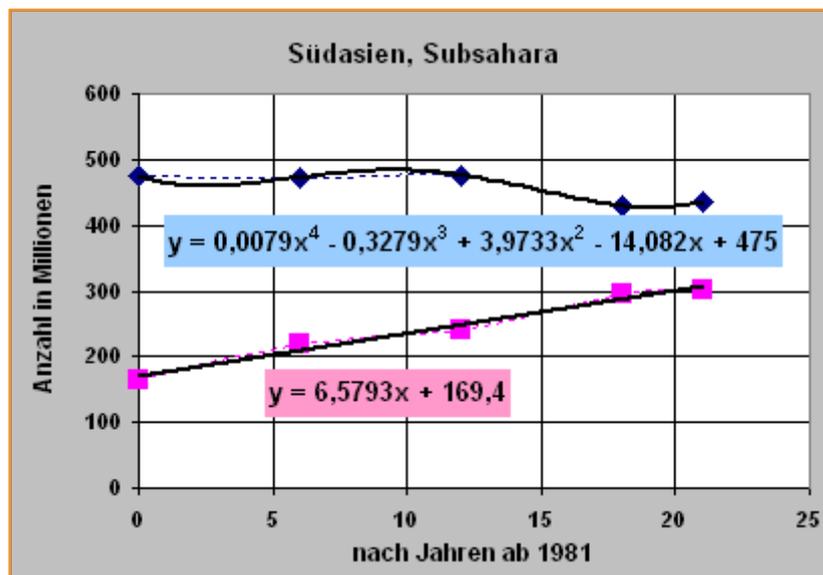
Der Verlauf aller Diagramme zeigt, dass sich die Situationen in Ostasien (Dreieck) und China (Kreis) erheblich verbessert haben. Der Anteil der Bevölkerung, der mit 1 US\$ in diesen Ländern auskommen muss, hat sich von nahezu 60% auf 15% verringert. Und auch der Anteil der Bevölkerung, der mit 2 US\$ pro Tag auskommen muss, ist von 90% auf 40% gesunken (*siehe hierzu die ExcelMappe auf Seite ma1337.htm*). Daher werden im Weiteren nur noch die Einkommens-Verhältnisse und das Bevölkerungswachstum in der Subsahara-Zone und Südasiens analysiert.

In der **Subsahara-Zone** nimmt die Anzahl der Personen, die mit 1 US\$ pro Tag auskommen müssen, ganz erheblich zu. Die Anzahl verdoppelt sich nahezu in den letzten 20 Jahren. Aber die prozentualen Anteile an der Bevölkerung, die mit 1 US\$ pro Tag auskommen müssen, bleiben nahezu gleich. Das klingt zunächst paradox! Es erklärt sich aber mit dem starken Bevölkerungswachstum in diesen Ländern, dass immer mehr hungern, obwohl der prozentuale Anteil an der Bevölkerung nahezu gleich bleibt.

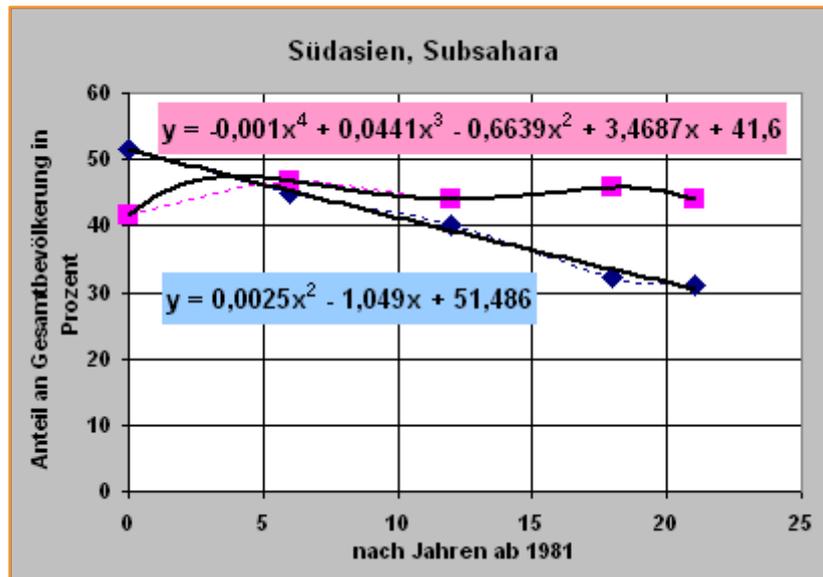
In **Südasien** stagniert die Anzahl der Personen, die mit 1 US\$ pro Tag auskommen müssen. Aber die prozentualen Anteile an der Bevölkerung, die mit 1 US\$ pro Tag auskommen müssen, nimmt bemerkenswert ab. Der Bevölkerung geht es also insgesamt besser. Was nicht heißt, dass sie bereits aus der prekären Hungersituation heraus sind.

2.2.3 Approximation der funktionalen Darstellungen mit Trendfunktionen

Wir approximieren den Verlauf der obigen Punkt-Linien-Diagramme sowohl für die Subsahara-Zone als auch für Südasien mit Hilfe von Excel durch die folgenden Trendlinien bzw. Trendfunktionen.



(Südasien = blaue Raute; Subsahara = rotes Quadrat)



Anmerkung zur Wahl der Trendfunktionen

Ob lineare oder biquadratische oder noch andere Trendfunktionen gewählt werden, ergibt sich in der Regel aus der Betrachtung des Gesamtverlaufs. Ist der Verlauf insgesamt gesehen positiv oder negativ, so kann z.B. linear approximiert werden. Ist dies nicht der Fall, so sollten in der Approximation die letzten Entwicklungen mit bedacht werden. So wäre z.B. in der ersten Grafik eine lineare Approximation für den Verlauf in Südasien negativ. Da aber die letzten Entwicklungen einen Aufwärtstrend zeigen, wurde hier eine biquadratische gewählt, die diesen Trend nachvollzieht.

2.2.4 Diskussion von Extrapolationen zu möglichen, zukünftigen Entwicklungen

Die Trendlinien nutzen wir für die folgenden Extrapolationen der möglichen Verhältnisse in 5 und 10 Jahren, also für 26 Jahre und 31 Jahre nach dem Jahr 1981. Mit einer Recherche überprüfen wir aber für das Jahr 2007 (also für 26 Jahre nach 1981), ob die Prognose für Afrika einigermaßen richtig war. Und das ist wohl der Fall!

Hier einige **Beispiel-Rechnungen für die Subsahara-Zone.**

(Die vollständigen Extrapolationen siehe ExcelMappen in MMM auf Seite [ma1337.htm](#))

Nach Jahren	Anzahl der Personen mit weniger als 1 US\$ pro Tag in Millionen	Prozentualer Anteil, der mit 1 US\$ pro Tag auskommen muss
26	340,4618	45,581
31	373,3583	45,979

2.2.5 Interpretationen zur Entwicklung von Hunger und Armut in Entwicklungsländern

Mindestens für die Subsahara-Zone ist der „Hunger“ nicht nur geblieben, sondern er hat sich verschärft. Rund 350 Millionen Menschen leben dort von weniger als 1 US\$ pro Tag, das sind rund 46 % der Bevölkerung!

Alleine schon auf der Grundlage dieser Analysen – weitere sind zur Bestätigung möglich und notwendig - kommen wir zu folgendem Ergebnis: In den **Low Income Countries** wie in den **Highly Indebted Poor Countries** fehlt in 20% bis 40% der Familien das Geld für eine ausreichende und ausgewogene Ernährung. Die Armut in diesem Teil der Bevölkerung ist dauerhaft und mit ihr der extreme Hunger. Und das hat Folgen für die Gesundheit (Unter- und Mangelernährung), für das Leistungsvermögen der Gesellschaft, für die Intelligenz der Heranwachsenden und auch für ausbrechende Kriege! *(Siehe hierzu auch die weiteren ExcelMappen in MMM auf Seite ma1337.htm)*

Im Gegensatz zur Armut in diesen Ländern ist die Armut in den Industrieländern ganz anderer Natur. Sie ist dort auch völlig anders definiert. Hier geht es mehr um einen absinkenden Lebensstandard und nicht um einen dauerhaften, existenziellen Hunger!



3. Skizze zur Begründung einer „Didaktik der dynamischen und funktionalen Modellierung“

3.1 Die Welt wird global, beschleunigt komplexer und vernetzter!

Bereits 1972 wurde die Studie „**Die Grenzen des Wachstums**“ von Donella und Dennis L. Meadows zur Zukunft der „Weltwirtschaft“ veröffentlicht und dem Club of Rome übergeben. In einem Computermodell wurden die globalen Wechselwirkungen zwischen Industrialisierung, Bevölkerungswachstum, Ernährung, Ausbeutung von Rohstoffreserven und Zerstörung von Lebensraum untersucht und in verschiedenen Szenarien mit unterschiedlichen Annahmen durchgerechnet (mehr dazu im Kapitel 7 und in MMM auf der mathematischen Hilfeseite ma7655.htm).

1992 wurden „**Die neuen Grenzen des Wachstums**“ von Eduard Pestel (Pestel, 1992) veröffentlicht und im „**30-Jahre-Update**“ (2004) erneut aktualisiert. Neue Erkenntnisse und die in der Zwischenzeit eingetretenen Entwicklungen wurden in die aktualisierten Simulationen aufgenommen, dennoch blieben die Ergebnisse in der Tendenz ähnlich.

Schlüsselprobleme sind für Wolfgang Klafki (wikipedia/Schlüsselprobleme) die wesentlichen Inhalte der Allgemeinbildung. Dazu zählen Frieden, Umwelt, Leben in der einen Welt, Technikfolgen, Demokratisierung, gerechte Verteilung in der Welt, Gleichberechtigung/Menschenrechte und Glücksfähigkeit. In allen Schulfächern sollen auf diese Schlüsselprobleme hin fokussiert exemplarisch die Bildungsinhalte vermittelt werden. **Klafki** und andere (u.a. das [Forum für Verantwortung](#)) leiten die Schlüsselprobleme aus den epochaltypischen Aufgaben der Menschheit ab, die vorerst nicht so bald gelöst werden können und deshalb auf absehbare Zeit Probleme darstellen, auf die der Bildungsprozess vorzubereiten hat.

Neuerdings belegt der Wissenschaftliche Beirat der Bundesregierung Globale Umweltveränderungen ([WBGU](#)) durch seine Forschungen, „**dass die zukünftige Entwicklung der Menschheit nur innerhalb eines begrenzten Entwicklungskorridors erfolgen kann**. Werden dessen Ränder überschritten, verliert die Entwicklung den Charakter der Nachhaltigkeit, etwa weil sie die Umwelt oder die sozialen und wirtschaftlichen Systeme überstrapaziert.“ Und weiter stellt er fest, dass „die Entwicklung der menschlichen Gesellschaft und die Veränderungen der Umwelt eng miteinander verflochten und nicht mehr als getrennte Prozesse zu verstehen sind und die hohe Komplexität der Zusammenhänge, die Analyse, Modellierung und übersichtliche Darstellung erschwert.“ ... „Um die Wechselwirkungen und Dynamiken im System Erde seit Beginn der Neuzeit zu verstehen, müssen Gesellschafts- und Naturwissenschaften interdisziplinär zusammenarbeiten“. Hierfür hat der WBGU den „[Syndromansatz](#)“ erdacht. „Syndrome (Krankheitsbilder der Erde) sind typische Ursache-Wirkungs-Muster des Globalen Wandels mit Auswirkungen auf Umwelt und gesellschaftliche Entwicklung.“ Bereits 1996 hat er die wichtigsten ‚Krankheitsbilder‘ benannt, wie etwa:

a) Raubbau an natürlichen Ökosystemen,

- b) Umweltdegradation durch
 - (1.) industrielle Landwirtschaft,
 - (2.) Abbau nicht-erneuerbarer Ressourcen,
 - (3.) weiträumige Verteilung zumeist langlebiger Schad-/Wirkstoffe,
- c) Schädigung von Naturräumen durch Tourismus,
- d.) Vernachlässigung ökologischer Standards im Zuge eines hochdynamischen Wirtschaftswachstums und
- e) Umweltgefährdung durch Deponierung von Abfällen.

Heute (Dezember 2009) bietet der WBGU insgesamt 18 Hauptgutachten zu Syndromen an z.B.: Sicherheitsrisiko Klimawandel, Armutsbekämpfung durch Umweltpolitik, Energiewende zur Nachhaltigkeit, Erhaltung und nachhaltige Nutzung der Biosphäre (mehr dazu unter http://www.wbgu.de/wbgu_download.html und auch im Kapitel 7 dieser Schrift).

3.2 Herausforderungen für die Schule

Neben diesen allgemein-didaktischen Herausforderungen gibt es derzeit auch methodisch orientierte Antworten auf die Herausforderungen unserer Zeit, etwa: **Globales Lernen** oder **Systemisches und vernetztes Denken** oder **Denken und Handeln in Zusammenhängen**.

„Das Bildungskonzept **Globales Lernen** will zu Weltoffenheit und Empathie erziehen. Es ist inhaltlich und methodisch ganzheitlich orientiert und vermittelt fächerübergreifend Wissensinhalte zu Eine-Welt-Themen und nutzt dabei innovative, partizipative Lernmethoden.“ Dabei wird versucht, vom heute üblichen Kategoriendenken (erste, zweite und dritte Welt) wegzukommen und global für die gesamte Welt zu denken und zu handeln. Eine wichtige Rolle spielen die Fragen nach der Verwirklichung von Menschenrechten, der globalen Gerechtigkeit und nach den Bedingungen für eine friedliche Welt“ (siehe: wikipedia/Globales_Lernen). „Globales Lernen ist (also) eine pädagogische Antwort auf die globalen Entwicklungs- und Zukunftsfragen sowie der Kernbestandteil einer Bildung für nachhaltige Entwicklung. Wobei unter einer nachhaltigen Entwicklung verstanden wird, dass die Bedürfnisse der heutigen Generation befriedigt werden, ohne die Lebensgrundlagen kommender Generationen zu gefährden. Siehe: <http://www.globales-lernen.de>.

Systemisches oder vernetztes Denken hat bereits Mitte der 80er Jahre im Spiel Ökolopoly von F. Vester (Vester, 2002) Eingang gefunden. Sein biokybernetischer Denkansatz bezieht sich auf die Inhalte vieler Fächer, ist aber qualitativer Natur. Wie im Fernsehen und in den Tages- und Wochenzeitungen wird in der Regel lediglich mit „je mehr ... desto mehr“ oder „je weniger ... desto mehr“ oder „je mehr ... desto weniger“ oder „je weniger ... desto weniger“ argumentiert. Und ganz viele Menschen interpretieren diese Zusammenhänge als lineare. Ein Denkfehler, der gewaltige Folgen für die Menschheit haben kann. Auch darauf wurde schon 1989 durch Dietrich Dörner (Dörner 1989) in seinem Buch „Die Logik des Mislingens - Strategisches

Denken in komplexen Situationen“ verwiesen.

Mit der Methode der „**system dynamics**“ (die von Jay Forrester erfunden und von seinen Schülern Donella und Dennis Meadows in „Grenzen des Wachstums, 1972“ genutzt wurde) können komplexe, dynamische Systeme im gesellschaftlichen, naturwissenschaftlichen, wirtschaftlichen und/oder technischen Kontext in vielen Fächern (also nicht nur in Mathematik) untersucht werden. Und diese Zusammenhänge sind in der Regel nicht linear!

Die Methode, in Netzen zu denken, setzt ein Denken in Zusammenhängen, also eine funktionale Analyse voraus. Sie unterstützt das globale Lernen und führt über eine funktionale und dynamische sowie statistische Modellierung eines realen Problems zu Erkenntnissen, wie nachhaltig, also langfristig wirksam, vernünftig und verantwortlich gehandelt werden sollte, wie also etwa die oben genannten Entwicklungskorridore (WGBU) eingehalten werden könnten. Dabei geht es um Hoffungsmodelle für nachfolgende Generationen und nicht um Untergangsszenarien.



Zeiten ändern und verdichten sich, vlü 2010

Das Erkenntnisinteresse (ob wissenschaftlich orientiert oder handlungs- und anwendungsbezogen) **richtet sich insbesondere beim funktionalen und dynamischen Modellieren immer auf interdisziplinäre Sach- und Wirkzusammenhänge.** Sie werden funktional, dynamisch und statistisch modelliert und auch numerisch (also quantitativ) simuliert, um so zu quantitativen, insbesondere aber zu qualitativ-interpretativen Verhaltensaussagen über die komplexen „Syndrome“ oder „Schlüsselprobleme“ zu gelangen. (Mehr dazu in allen Beispielen dieser Schrift; siehe auch das Literaturverzeichnis der Schrift „Denken in Netzen“.)

Begriffe und Symbole der systems dynamics siehe das Kapitel 3.3 in der Schrift „Denken in Netzen – systemisch denken“, die ebenfalls in MMM herunterladbar ist.

Siehe aber auch die vertiefenden Ausarbeitungen in der Lernumgebung Modellieren mit Mathe

- ▶ [Systeme, Untersysteme und ihr Verhalten \(ma7420.htm\)](#)
- ▶ [Modellanalyse, quantitative und qualitative Modelle \(ma7430.htm\)](#)
- ▶ [Blicke in Zukunft und Vergangenheit \(ma7480.htm\)](#)

3.3 Herausforderungen für den Mathematikunterricht

Die in Deutschland für alle Bundesländer verbindlichen [Bildungsstandards](#) (ma8380.htm) für den Mathematikunterricht reagieren auf die zuvor beschriebenen Herausforderungen. Ähnlich antworten aber auch andere Länder in ihren „Rahmenlehrplänen“. Neben den inhaltlichen Kompetenzen (sie waren schon immer zentral als Stoffplan in den Lehrplänen vorhanden) werden nun auch allgemeine (oder prozessbezogene) Kompetenzen formuliert, die am Ende der Sekundarstufe 1 und 2 erworben sein sollen.

Der zukünftige Mathematikunterricht steht also vor der Aufgabe einer Neuorientierung. Und für diesen Veränderungsprozess ist sicherlich auch ein Lernbegriff, wie er auf den Seiten [ma8105.htm](#), [ma8115.htm](#), [ma8120.htm](#), [ma8130.htm](#), [ma8140.htm](#) und [ma8150.htm](#) beschrieben wird, von grundsätzlicher Bedeutung. Dieser veränderte Mathematikunterricht ist dann so angelegt, dass **mathematisches Wissen funktional, flexibel und mit Einsicht in vielfältigen kontextbezogenen Situationen angewendet werden kann**. Schülerinnen und Schüler sollen auf diese Weise Mathematik als anregendes, nutzbringendes und kreatives Betätigungsfeld erleben.

In der Folge wird zunächst am **Beispiel der Kernlehrpläne Mathematik für NRW** verdeutlicht, wie durch die Arbeit an realen Situationen aus „Mathe Überall“ und realen Problemen aus „Modellieren mit Mathe“ die allgemeinen (prozessbezogenen) Kompetenzen durch Mathematik-Lehrkräfte vermittelt und so durch die Lernenden erworben werden können. Sodann wird ein Vorschlag unterbreitet, wie **funktionale und dynamische Modellierungen in das Schulcurriculum Mathematik**, als wichtige zukunftsorientierte Kompetenzen, eingebettet werden können.

3.3.1 Prozessbezogene oder allgemeine Kompetenzen¹

1. Argumentieren / Kommunizieren

bis Jahrgang	6	8	10	
Informationen	wiedergeben	strukturieren	analysieren	
	Sachverhalte	Arbeitsschritte	Zusammenhänge	erläutern
Im Team Lösungswege	besprechen	vergleichen	überprüfen und bewerten	
	Ideen	Lösungswege	Problembearbeitungen	vortragen
	Begriffe	Begriffe	Verfahren	in Beziehung setzen
	intuitiv	wissensbasiert	unter Nutzung mathematischer Symbolik	begründen

Beispielformulierungen zu diesen Kompetenzen; bezogen auf die Arbeit mit MMM

- Die zu einem realen Problem aufbereiteten und verfügbar gemachten Sachinformationen und Daten bezogen auf eine zu lösende Aufgabe wiedergeben oder/und strukturieren oder/und analysieren können.
- Zusammenhänge und Wechselwirkungen verbal erläutern und beschreiben können.
- Sich im Team für die Lösung einer Problemfrage sowie eines Lösungsverfahrens entscheiden können und Lösungswege besprechen und/oder vergleichen und/oder überprüfen und/oder bewerten können.
- Den Lösungsweg einer funktionalen oder dynamischen Modellierung unter Nutzung vereinbarter mathematischer Symbole und Begriffe im Team darstellen, diskutieren und begründen können.
- Eine Problembearbeitung mittels funktionaler oder dynamischer Modellierung so in der Klasse vortragen bzw. präsentieren können, dass alle anderen folgen können und dann die Lösung auch miteinander diskutieren können.

¹ Diese und die folgenden Tabellen fassen die allgemeinen Kompetenzerwartungen am Ende der Jahrgangsstufen 6, 8 und 10 (Kernlehrpläne NRW, Seite 18 - 31) in jeweils einer zusammen.

2. Problemlösen

bis Jahrgang	6	8	10
Problemstellungen	finden, wiedergeben	untersuchen	zerlegen
bei der Problemlösung	Näherungswerte / Schätzwerte, elementare Regeln bzw. Verfahren, sinnvolle Beispiele verwenden, ausprobieren	planen und beschreiben, Algorithmen, bereits Bekanntes, verschiedene Darstellungsformen nutzen, verallgemeinern, mehrere Lösungen und Lösungsansätze überprüfen	von den Voraussetzungen ausgehend oder vom Ziel rückwärts eine Begründungskette erarbeiten
Ergebnisse	deuten	überprüfen	
Lösungswege		überprüfen	vergleichen und bewerten

Beispielformulierungen zu diesen Kompetenzen; bezogen auf die Arbeit mit MMM

- Innerhalb der komplexen realen Probleme sich für die Arbeit an einer Problemfrage entscheiden, sie in der Gruppe wiedergeben und untersuchen können.
- Bei einer Problem“lösung“ mittels Punkt-Diagrammen (und anderen graphischen Darstellungsformen) von Zeitreihen für zukünftige Entwicklungen Schätz- oder Näherungswerte angeben und deuten können.
- Zukunftsaussagen mittels Extrapolationen (also mit Termen) überprüfen, vergleichen und bewerten (interpretieren) können.
- Die Unsicherheit einer Zukunftsaussage mittels unterschiedlicher Extrapolation (also mit unterschiedlichen Termen) miteinander besprechen und bewerten können.
- Verhaltensaussagen über dynamische Systeme mittels Simulationen (auf der Grundlage von Zustandsgleichungen und graphischen Darstellungsformen) qualitativ und/oder quantitativ formulieren und auf den Zweck des Modells hin bewerten können.
- Eine Problemlösung bzw. einen Lösungsweg verständlich für alle anderen in der Klasse vortragen bzw. präsentieren können.

3. Modellieren

bis Jahrgang	6	8	10	
	Sachaufgaben	Realsituationen	insbesondere Wachstums-Prozesse	in mathematische Modelle übersetzen (Terme, Diagramme, Tabellen, Graphen)
mathematische Modelle einer Situation	überprüfen	überprüfen und verändern	vergleichen und bewerten	
einem mathematischen Modell	eine passende	Realsituation	zuordnen	

Funktionale, dynamische und statistische Modellierungen sind das Kernanliegen in der Lernumgebung Modellieren mit Mathe (MMM).

In MMM sind alle (z.Zt. dreiunddreißig) **realen Probleme** (als Syndrome oder Schlüsselprobleme unserer Zeit) inhaltlich so aufbereitet, dass sie - mindestens in Teilproblemen immer noch als Realsituation oder als Sach“aufgabe“ - im Mathematikunterricht behandelbar und vermittelbar sind. Diese Art von Sachaufgabe unterscheidet sich aber wesentlich von den in Schulbüchern konstruierten. Hierzu siehe in MMM die Ausführungen unter: [„Reale Probleme und nachhaltiges Lernen sowie reale Probleme und mathematische Inhalte“](#) (ma8105.htm).

In der Lernumgebung [„Mathe Überall“](#) (MÜ) sind für die Klassen 4 bis 7 Realsituationen in derselben Weise wie in MMM aufbereitet. In dieser Lernumgebung gibt es auch Realsituationen zur Abbildungsgeometrie.

Beispiele für funktionale Modellierungen u.a. mit linearen, quadratischen und exponentiellen Funktionen werden in dieser Schrift in den Kapiteln 2, 5, 6 und 7 vorgestellt. Ihre unterrichtliche (didaktisch-methodisch-organisatorische) Einbettung wird im Kapitel 4 in allgemeiner Weise beschrieben. Beispiele für dynamische Modellierungen werden in der Schrift „Denken in Netzen – systemisch denken“ ausgeführt.

Warum diese allgemeinen Kompetenzen des mathematischen Modellierens in einer Welt stetig wachsender Komplexität so wichtig sind, dass ist in Kapitel 3.1 und 3.2 begründet und beschrieben worden.

Mit der funktionalen Modellierung realer Probleme können u.a. folgende zukunftsorientierte Kompetenzen vermittelt und erworben werden. Sie sind prozessorientiert und gleichzeitig auch inhaltlich orientiert:

- Datensätze in Diagrammen (etwa mit Excel) darstellen, in ihrem Verlauf beschreiben und als sachangemessen bewerten können.
- Terme für die dargestellten Zusammenhänge finden oder mittels Trendfunktionen (mit Ex-



cel) approximieren können.

- Mittels Extrapolationen Trendaussagen zu möglichen, zukünftigen Entwicklungen begründen und bewerten können.
- Korrelationen in Graphen darstellen sowie interpretieren und bewerten können.
- Den Verlauf der Graphen, die approximierten Funktionen und Trendberechnungen sachbezogen interpretieren können.
- Funktionale Modellierungen an realen Problemen zum Erkenntnisgewinn nutzen und daraus ggf. Handlungsstrategien ableiten und beschreiben können.
- Reale Probleme mit der mathematischen Methode der „systems-dynamics“ beschreiben, darstellen, modellieren, programmieren, simulieren, interpretieren und beurteilen können. (Was das im Einzelnen bedeutet, das siehe in der Schrift „Denken in Netzen – systemisch denken“ auf den Seiten 46 f.)

Siehe hierzu auch die konkreten Kompetenzbeschreibungen in MMM u.a. auf den Folgeseiten von: ma1110.htm; ma1160.htm, ma1170.htm, ma1220.htm, ma1230.htm, ma1330.htm, ma1430.htm, ma1550.htm, ma1620.htm, ma1670.htm, ma1910.htm, ma1920.htm, ma1960.htm.

4. Werkzeuge nutzen

Die Lernumgebungen MMM und auch MÜ sind selbst hypermediale Medien. Zu jedem realen Problem oder jeder realen Situation gibt es neben den aufbereiteten Sachinformationen auch **kommentierte Links ins Internet**. Auch sie können zur **zusätzlichen Informationsbeschaffung** genutzt werden.

bis Jahrgang	6	8	10	
	Lineal, Geodreieck, Zirkel	Tabellenkalkulation, Geometriesoftware, Taschenrechner	Funktionsplotter	nutzen
			ein geeignetes Werkzeug auswählen und nutzen	
Ergebnisse / Daten	auf Folie, Plakat, Tafel, im Merkheft / Lerntagebuch	unter Zuhilfenahme einer Tabellenkalkulation		zusammenstellen und präsentieren
			geeignete Medien zur Dokumentation und Präsentation auswählen	
Zur Informationsbeschaffung	Heft und Schulbuch	Lexika, Schulbücher, Internet	Medien aller Art	nutzen

Zur **Präsentation von Modellierungsergebnissen** nutzen die Jugendlichen sehr gerne das Programm **PowerPoint**. Es kann aber zum bebilderten Herunterrasseln der Ergebnisse verführen und ist dann **kontraproduktiv für ein aktives Zuhören** der Anderen, was aber notwendig ist, um die Ergebnisse in einer Diskussion zusammenzuführen.

Tabellenkalkulationsprogramme bieten sich sowohl zur funktionalen als auch dynamischen Modellierung in besonderer Weise an. Sie sind nach allen Erfahrungen auch schon ab Klasse 4 verständlich nutzbar, wenn man sich jahrgangsbezogen auf die Funktionen des Werkzeugs beschränkt, die zur Lösung einer Realsituation oder eines realen Problems notwendig sind. **Excel ist ein solches Werkzeug**². Und da es weit verbreitet ist, bietet es sich geradezu an (siehe in MMM die Seite „[Das Werkzeug Excel: Crash-Kurse zur selbstständigen Einarbeitung](#)“ - *ma9050.htm*). In Systematisierungsphasen im Unterricht bieten sich auch CAS als Werkzeuge an (siehe in MMM die Seite „[Computer-Algebra-Systeme: u.a. Beispiele zur selbstständigen Einarbeitung in Derive](#)“ - *ma9300.htm*).

3.3.2 Mathematisch inhaltliche Kompetenzen

In der Folge wird für Fachkonferenzen in Schulen ein Vorschlag unterbreitet, in welcher Klassenstufe und in welcher zeitlichen Abfolge die inhaltlichen mathematischen Kompetenzen zur funktionalen und dynamischen Modellierung in das Mathematik-Curriculum einer Schule eingebettet werden können. Diese Modellierungen benötigen in den unteren Jahrgangsstufen insgesamt etwa 20 Unterrichtsstunden von den insgesamt ca. 240 verfügbaren Mathematik-Unterrichtsstunden in einem Schuljahr. In den Jahrgangsstufen ab Klasse 8 sind etwa 30 Unterrichtsstunden notwendig. Wird ein umfangreiches Projekt durchgeführt, so erhöht sich die Zahl auf etwa 40 Unterrichtsstunden. Die folgenden Anregungen müssen natürlich in der einzelnen Schule noch konkretisiert werden!

Natürlich kann die zeitliche Aufeinanderfolge auch eine andere als die im Folgenden vorgeschlagene sein. Der Beginn mit funktionalen und dynamischen Modellierungen sollte aber in einer Anwendungsphase des „herkömmlichen“ Mathematikunterrichts erfolgen. Ein zweiter Durchgang kann dann auch projektorientiert ablaufen. Wichtig ist, dass schließlich beide Modellierungsarten im Zusammenhang vorkommen. Projekte haben den höchsten Freiheitsgrad für die Selbstregulierung des Lernens und zur Verwirklichung der Interessen der Lernenden. Nutzen die Jugendlichen die in MMM ausgearbeiteten möglichen Lösungen, so ist dies dann kein Schaden, wenn ihre eigenen Leistungen dabei deutlich sichtbar bleiben.

² Excel kann ohne Probleme durch das frei verfügbare Open Office ersetzt werden.

Funktionale und dynamische Modellierung in der Klassenstufe 5 bis 6 auf der Grundlage von Realsituationen aus der Lernumgebung MatheÜberall³

Quartal	Inhaltliche Kompetenzen	Beispiele für mögliche reale Situationen
Herbst	Graphische Darstellung und Interpretation von vorgegebenen Daten	z.B.: „beleidigen, rempeln, schlagen, boxen, treten, ...“ (ma0110.htm)
Winter	Dreisatz, Kalkulationen in der Menge der ganzen Zahlen, graphische Darstellungen	z.B.: „Obstsalat für das Schulfest“ (ma0720.htm) oder „Ein Besuch beim Gemüsehändler“ (ma0750.htm) oder „Erdbeeren zum Selberpflücken!“ (ma0530.htm) oder Unser Traum: Ein neuer Schulhof (ma0720.htm)
Frühjahr	Addition und Multiplikation in \mathbb{N} ; (einfache dynamische) Wachstumsprozesse	z.B.: „Und plötzlich hustet die ganze Klasse“ (ma0810.htm) oder „Spiele mit dem Prinzip Weitersagen“ (ma0120.htm)

In der **Lernumgebung Mathe Überall** gibt es auch einige Realsituationen, die vornehmlich in eine **statistische Modellierung** führen. Zum Beispiel:

[Große Jungs und kleine Mädchen - for ever and a day?](#) (ma0320.htm) oder

[Warst du aber ein Pummelchen!](#) (ma0330.htm) oder

[Wasser ist einfach wunderbar! - Haben wir genug davon?](#) (ma0420.htm)

Darüber hinaus enthält die **Lernumgebung Mathe Überall** auch Beispiele zur **geometrischen Modellierung**. Zum Beispiel:

[Spiegel-Symmetrien überall - auch an eurem Körper!](#) (ma0660.htm) oder

[Kreissymmetrien alltäglich - um euch!](#) (ma0670.htm) oder

[Ornamente, Parkettierungen und Muster -!](#) (ma0680.htm)

³ **Anmerkungen:** Im Sommer-Quartal könnte jeweils eine geometrische Modellierungsarbeit durchgeführt werden.

Funktionale und dynamische Modellierung in der Klassenstufe 7 bis 8 auf der Grundlage von realen Problemen aus der Lernumgebung MMM

Quartal	Inhaltliche Kompetenzen	Auswahl möglicher realer Probleme
Herbst	Dreisatz, Prozent- und Zinsrechnung sowie lineare Funktionen	z.B.: Freier Markt – faire Preise (ma0310.htm) oder Extreme Armut - Hunger lebenslänglich? (ma0330.htm) oder ...
Winter	Lineare Funktionen, Lineares und unbegrenztes dynamisches Wachstum	z.B.: Machtlos gegen Gewalt? (ma0110.htm) oder Handy, Internet, MP3 Player: mögliche Geldsorgen und Bedrohungen (ma0210.htm) oder
Frühjahr	Lineare Funktionen und auch schon andere funktionale Abhängigkeiten sowie weitere dynamische Wachstumsprozesse ggf. auch mit zwei Zustandsgrößen	z.B.: Wohlstand für alle! Vision oder Möglichkeit? (ma0320.htm) oder Wenn sich Gerüchte ausbreiten oder Medien Wirklichkeit erzeugen! (ma0120.htm) oder Ökologischer Landbau: u.a. umweltschonende „Schädlings-“ und „Unkraut“-Bekämpfung (ma0910.htm) oder

Funktionale und dynamische Modellierung in der Klassenstufe 9 bis 10

Quartal	Inhaltliche Kompetenzen	Auswahl möglicher realer Probleme
Herbst	Quadratische und ganzrationale Funktionen	z.B.: Werden die Reichen immer reicher? (ma0230.htm) oder ...
Winter	Funktionale Abhängigkeiten, dynamische Wechselwirkungen zwischen zwei und mehr Zustandsgrößen	z.B.: AIDS, Grippe SARS und andere „moderne“ Epidemien? (ma0620.htm) oder Klimawandel auf der Erde - unumgänglich? (ma0550.htm) oder ...
Frühjahr	Quadratische und rationale Funktionen Wechselwirkungen zwischen zwei und mehr Zustandsgrößen	z.B.: Arbeit für alle!?! (ma0170.htm) (siehe Kapitel 7) oder Ökologischer Landbau: u.a. umweltschonende „Schädlings-“ und „Unkraut“-Bekämpfung (ma0910.htm) oder

Funktionale und dynamische Modellierung in der Klassenstufe 11 bis 12

Quartal	Inhaltliche Kompetenzen	Auswahl möglicher realer Probleme
Herbst	Exponential- und Potenzfunktionen	z.B.: : AIDS, Grippe SARS und andere „moderne“ Epidemien? (ma0620.htm) oder Bevölkerungsexplosion: oder? (ma0150.htm) oder
Winter	Dynamische Wechselwirkungen zwischen mehr als zwei Zustandsgrößen, Korrelationen	z.B.: Klimawandel auf der Erde - unumgänglich? (ma0550.htm) oder Energie“Hunger“: Stillbar mit welchen Kosten und Folgen? (ma530.htm) oder
Frühjahr	Exponential- und Potenzfunktionen, Korrelationen, Wechselwirkungen zwischen mehr als zwei Zustandsgrößen	z.B.: Artensterben heute: erschöpfte Natur? - Krisen der biologischen Evolution (ma0920.htm) oder Fische in „Seenot“! - Alles nur Panikmache? (ma960.htm) oder Wachstum, Wachstum ... : Boom ohne Grenzen? (ma0220.htm)

In MMM sind, wie zuvor beschrieben, sowohl die prozessbezogenen als auch die inhaltlichen Kompetenzbereiche augenfällig deutlich repräsentiert. Durch die Verwendung der Lernumgebung MMM erhält eine Schule also ohne große Vorarbeit die Möglichkeit, die Realisierung der genannten Kompetenzbereiche in ihr schulinternes Curriculum zu übernehmen.

3.3.3 Gegenüberstellung von funktionaler und dynamischer Modellierung

Funktionale Modellierungen führen zu Beschreibungen von Verläufen in der Vergangenheit und versuchen über funktionale Approximationen (mit Trendlinien) zu Prognosen für die nahe Zukunft zu gelangen. Die so gefundenen Funktionen werden dabei als über der Menge der realen Zahlen definiert angenommen. Nur so sind dann z.B. Ableitungen der Funktion möglich. Erkenntnisse, die über funktionale Modellierungen gewonnen werden, sagen, wie es war und wie es ggf. sein wird, wenn sich die Bedingungen nicht ändern. Die Unsicherheit der Prognosen lässt sich über die Steigungen der Funktionen im Endbereich der Vergangenheitsdarstellung abschätzen. Mehr dazu ist in MMM unter [Blicke in Zukunft und Vergangenheit](#) (ma7480.htm) beschrieben.

Dynamische Modellierungen führen zu Beschreibungen des Systemverhaltens von dyna-

mischen Modellen, die zu einem bestimmten Zweck untersucht wurden. Sie erlauben Aussagen darüber, wie eine Veränderung der Parameter im System wirken kann, in welcher Richtung ihre Veränderung verheerende oder günstige Auswirkungen hat. Erkenntnisse dieser Art basieren zwar auf quantitativen Abhängigkeiten. Sie sind schließlich aber in der Regel qualitativer Natur. Siehe hierzu die konkreten Verhaltensbeschreibung und Interpretation in den Kapiteln 2, 5, 6 und 7 der Schrift „Denken in Netzen – systemisch denken“.

Das Ziel einer dynamischen Modellbildung im Mathematik-Unterricht besteht also nicht darin, „zuverlässige“, prognostische Ergebnisse für eine zukünftige Entwicklung zu liefern. Das unterrichtliche Ziel liegt insbesondere darin, Erkenntnisse über kritische Größen aus ihrer strukturellen Beschaffenheit heraus zu gewinnen, um so zu erkennen, wie es der WBGU formuliert, dass die zukünftige Entwicklung der Menschheit nur innerhalb eines begrenzten ‚Entwicklungskorridors‘ erfolgen kann.

3.3.4 Widerstände gegen eine funktionale und dynamische Modellierung

Komplexe, reale Aufgabenstellungen können von überschaubaren bis hin zu zunächst unüberschaubaren realen Problemen reichen. **Funktionale und systemdynamische Methoden besitzen im Allgemeinen einen stark experimentellen Charakter und führen in der Regel zu nicht eindeutigen Ergebnissen.** Bei dieser Form des Mathematik-Treibens tritt also an die Stelle der Frage „Ist das richtig oder falsch?“ die Frage „Inwieweit ist dieses Modell (...) passend, brauchbar oder geeignet?“ Aber trotz eines immer wieder begründeten und geforderten erweiterten Verständnisses von Mathematik, muss auch heute noch festgestellt werden, dass ein Wechsel weg von der alleine vorherrschenden dualen „wahr-falsch“-Logik überhaupt noch nicht akzeptiert wird. Dies sowohl in der schulischen Mathematik als auch in der Fachwissenschaft. Und auch Jugendliche wollen wegen des vorhergegangenen Mathematik-Unterrichts wissen, ob sie ein Beispiel „richtig“ gelöst haben oder nicht. Wenn man z.B. mit Jugendlichen oder auch mit Studierenden des Lehramtes Mathematik über verschiedene Wirkungsdiagramme oder über robuste Werte für Größen diskutiert oder über Zukunftsaussagen diskutiert, die jeweils verschiedene Standpunkte zum selben realen Problem darstellen, dann kommt unweigerlich die Frage „Und welches dieser Diagramme oder welcher dieser Werte ist jetzt richtig?“ Dass keines dieser Diagramme und keiner dieser Werte „richtig“ und alle anderen zwingend logisch „falsch“ sind, bereitet teilweise großes Unbehagen und wird dann abgetan mit dem Argument: „Wenn es hier kein richtiges Diagramm und keinen richtigen Wert gibt, dann ist das Ganze auch keine Mathematik mehr!“ (Ossimitz, 2000, Seite 103). **Kommunikative Auseinandersetzungen mit dem jeweiligen Anwendungsbereich, für den die Mathematik Erkenntnisse bereitstellt, besitzen daher eine erhöhte Bedeutung.**

Daher sind Mathematiklehrerinnen und Mathematiklehrer in einem Unterricht, in dem funktional oder dynamisch modelliert wird, als **kompetente Laien** gefragt. Hierzu ein nicht ganz so ernst gemeinter Exkurs zu Experte und Laie:

Mit Experte wird in der Regel die Eigenschaft der Kompetenz und mit Laie die Eigenschaft der Bildung verbunden.



Ein **kompetenter Experte** ist ein Mensch, der von immer weniger, immer mehr weiß, bis er - übertrieben formuliert - schließlich von Nichts Alles weiß.

Ein **gebildeter Laie** ist ein Mensch, der von immer mehr, immer weniger weiß, bis er - übertrieben formuliert - schließlich von Allem Nichts weiß, aber über Alles „geistreich“ reden kann.

Mit Vertauschen der Adjektive soll hier eine andere Bedeutung zustande kommen:

Der **gebildete Experte** weiß, dass er von fast Nichts, viel weiß. Seine Bildung liegt darin, dass er bereit und dafür qualifiziert ist, sich mit ganz „normalen“ Menschen über seine Sache zu verständigen.

Der **kompetente Laie** weiß, dass er von Vielem, wenig weiß. Seine Kompetenz liegt darin, dass er bereit und dafür qualifiziert ist, sich mit gebildeten Experten zu verständigen.

In einer interdisziplinären Arbeits- und Gesprächsrunde, wie sie in einer Modellierungsphase gegeben ist, sollten sich Menschen begegnen, die sich als gebildete Experten und kompetente Laien verhalten. Dafür muss jedoch ein Verständnis und eine Bereitschaft entwickelt werden. Es kann und sollte als ein überfachliches, neues Lernziel begriffen werden.

3.4 Computerwerkzeuge zur funktionalen Analyse

Die Lernumgebung MMM stellt Hilfen u.a. zur selbstständigen Einarbeitung in die Werkzeuge Excel und Derive zur Verfügung. Es ist daher nicht notwendig, vor der Nutzung von Excel oder Derive einen Einführungskurs zu starten. Der Umgang mit diesen Werkzeugen kann immer im Kontext der Anwendung soweit selbstorganisiert gelernt werden, wie es eine Analyse funktionaler Zusammenhänge fordert. Und das kann auch Zuhause erfolgen.

Excel ist ein Werkzeug zum Kalkulieren sowie zum „Zeichnen“ von Diagrammen. Die Grundelemente von Excel sind Spalten, Zeilen und Zellen. Aus diesen Grundelementen können eigene Tabellen aufgebaut, gestaltet und in unterschiedlichen Diagrammen dargestellt werden. [Siehe MMM Seite ma9050.htm](#):

Kurs 1: Wir erstellen eine Excel-Tabelle	Kurs 4: Wir erzeugen ein Punkt- oder Liniendiagramm	Kurs 6: Wir erzeugen ein Liniendiagramm mit zwei „Kurven“
Kurs 2: Wir geben eine Rechenvorschrift ein	Kurs 41: Wir erzeugen zu einem Punktdiagramm eine Trendlinie	Kurs 7: Wir gestalten ein Kreisdiagramm
Kurs 21: Wir runden die berechneten Zahlen einer Rechenvorschrift	Kurs 5: Wir gestalten ein Punkt/Liniendiagramm	Kurs 8: NNxxNN xxNNxx
Kurs 3: Wir gestalten ein einfaches Balkendiagramm	Weitere Beispiele für die Einarbeitung in Excel-Tabellen und Excel-Diagramme	

Derive ist ein Beispiel für ein **Computer-Algebra-System** (kurz: CAS). CAS sind heute auch in einigen Taschenrechnern eingebaut; sie können Gleichungen und Gleichungssysteme lösen oder auch symbolisch Ableitungs- und Stammfunktionen ermitteln sowie einfache Differenzialgleichungen bearbeitet.

CAS sind mittlerweile in der Schule stark verbreitet. [Siehe MMM Seite ma9300.htm:](#)

Einige Informationen zur Handhabung von Derive	Derive: Achsen eichen, Punkte eingeben	Derive: Eine lineare Funktion zeichnen
Derive: Eine quadratische Funktionsgleichung finden	Derive: Den Schnittpunkt zweier Geraden bestimmen	Beispiel: NxxNxxN



4. Idealtypische Unterrichtsabläufe oder Szenarien

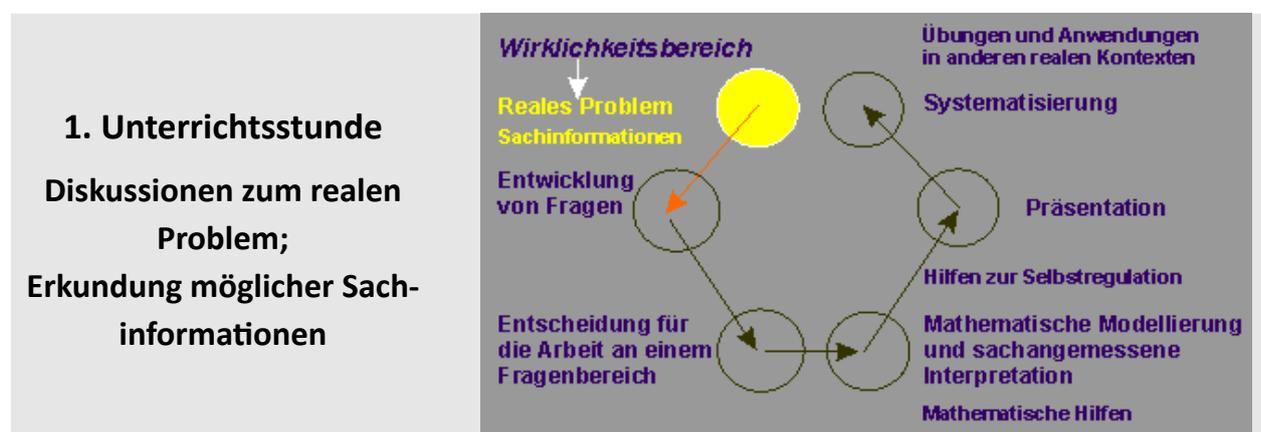
In diesem Kapitel werden zwei idealtypische Unterrichtsabläufe (oder Unterrichtsszenarien) ausführlich mit didaktischen und insbesondere methodischen sowie organisatorischen Anregungen beschrieben. Im Kapitel 5 „Anwendungen der funktionalen Modellierung mit linearen und quadratischen Funktionen“ sowie im Kapitel 6 „Projektorientierte Einführung in die funktionale Modellierung mit exponentiellen Funktionen“ werden daher die dort ausgeführten Beispiele nur noch in die folgenden Unterrichtsabläufe eingebettet.

4.1 Die funktionale Modellierung in einem projektorientierten Mathematikunterricht

Der projektorientierte Unterrichtsverlauf ist der umfassende. Daher wird er hier zuerst beschrieben. Unterrichtsprojekte haben im Prinzip denselben Ablauf. Aber der Freiheitsgrad in der Selbstregulierung des Lernens wird noch einmal größer. So können bei einem Projektthema (siehe Kapitel 7) die zu bearbeitenden Anforderungen auch aus unterschiedlichen realen Problemen gewählt werden. Auf diese Weise können dann auch die Interessen der Lernenden noch stärker als bei einem projektorientierten Unterricht berücksichtigt werden.

Im Vorfeld eines projektorientierten Unterrichts prüft die Mathematiklehrerin oder der Mathematiklehrer, ob und wann sich ggf. andere Lehrkräfte, die in derselben Lerngruppe (Klasse) unterrichten, beteiligen wollen. Möglich wären je nach realem Problem eine Beteiligung der Fachlehrerinnen oder Fachlehrer für Natur-, Gesellschafts- und Wirtschaftswissenschaften sowie für Religion/Ethik. Falls sie sich beteiligen, stünden alle diese Fachstunden in der Klasse für das Projekt zur Verfügung. Alle beteiligten Lehrkräfte würden dann in ihren Stunden die projektorientierte Arbeit der Klasse begleiten und insbesondere diejenigen Kleingruppen der Klasse „inhaltlich“ betreuen, die an einer Frage arbeiten, die auch ihr Fach betrifft.

Das Leitfach bleibt aber die Mathematik. In der folgenden Beschreibung wird sogar davon ausgegangen, dass der projektorientierte Unterricht alleine im Fach Mathematik durchgeführt wird. Der projektorientierte Unterricht im Fach Mathematik ist also nicht davon abhängig, dass sich andere Fachlehrerinnen und Fachlehrer beteiligen.





Die Mathematiklehrerin oder der Mathematiklehrer führt in eine Diskussion des realen Problems ein und verweist die Jugendlichen auf die aufbereiteten Sachinformationen zu diesem realen Problem. Sodann erteilt sie/er folgende **Arbeitsaufträge**:

1. Setzt die begonnene Diskussion in spontan gebildeten Kleingruppen fort, notiert das für euch Wichtige.
2. Lasst euch in euren Diskussionen unterstützen durch:
 - a) **eine mögliche Bild-Diskussionen oder eine „Geschichte“ zur Problematik** (immer die Seite ma0xx0a.htm)
 - b) **einige Blicke auf die Problemlage** (immer die Seite ma0xx2.htm)
3. Legt eine Projektmappe an, in der ihr alle von euch benutzen „Arbeitsblätter“, eure Modellierungs- und Diskussionsergebnisse, ggf. eure Rechercheergebnisse sowie auch eure Präsentation abheftet. Notiert dort auch, was euch sachlich betroffen macht, was euch gefallen oder nicht gefallen hat sowie das, was euch Schwierigkeiten im Verständnis bereitet hat.

Didaktische, methodische und organisatorische Anregungen

Die Seiten („Bilddiskussion...“ und „Blicke auf...“) können als „Arbeitsblätter“ ausgedruckt werden. Jugendliche können dann das für sie Wichtige unterstreichen oder hervorheben. Werden die Seiten am Computer gelesen, erfolgen die Notizen in der Projektmappe. Bei der gedanklichen Organisation der komplexen Sachzusammenhänge kann auch eine Visualisierung in einer Begriffslandkarte oder einer Mindmap hilfreich sein.

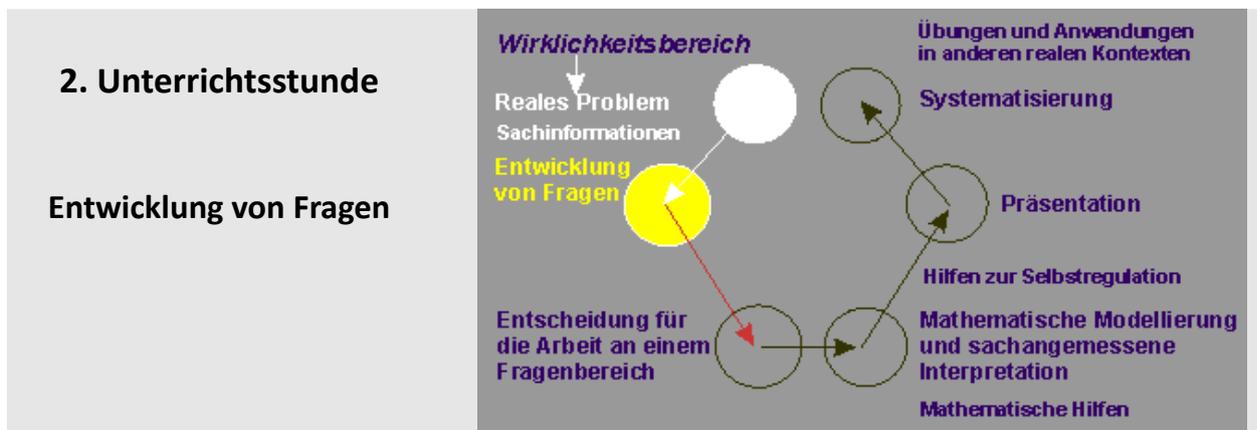
Anmerkung: Wird in einer Gruppe auch dynamisch modelliert, so wird zur Veranschaulichung möglicher dynamischer Zusammenhänge in jedem Fall ein Wirkungsdiagramm empfohlen. Siehe hierzu in MMM die Seite [„Wortmodell > Wirkungs- & > Flussdiagramm > Gleichungen > Simulationen“](#) (ma7415.htm) sowie [„System-Archetypen für Verhaltensmuster - Kurzdarstellung und Verweise ins Internet“](#) (ma9250.htm).

Durch eine Auseinandersetzung mit dem oder den realen Problemen können und sollen die **persönlichen Interessen zur Bearbeitung einer bestimmten Frage** geweckt werden. Denn: „Schülerinnen und Schüler sind am aufmerksamsten und konzentriertesten, wenn sie sich mit Lernaufgaben beschäftigen, die persönlich bedeutungsvoll für sie sind oder eine sinnvolle Erfahrung erlebbar machen. Aufgabe der Lehrenden ist es also, Betroffenheit herzustellen, d.h. eine möglichst enge Verbindung zwischen den Zielen von Schule und den Interessen der Lerner/innen herbeizuführen. Dies kann z.B. durch anregende problemhaltige Situationen geschehen, die subjektive Zugangsweisen für die Konstruktion der Schüler/innen anbieten. Um möglichst viele Schüler/innen erreichen zu können, müssen vielfältige Einstiegsmöglichkeiten, ... bereitgestellt werden, die an den verschiedenen Vorverständnissen anknüpfen und die je spezifischen Qualitäten des Vorwissens respektieren“ (H. Haenisch, Soest 1999). **Siehe hierzu auch die aus-**

fürlichen Texte in MMM unter „[Reale Probleme und nachhaltiges Lernen](#)“ (ma8105.htm).

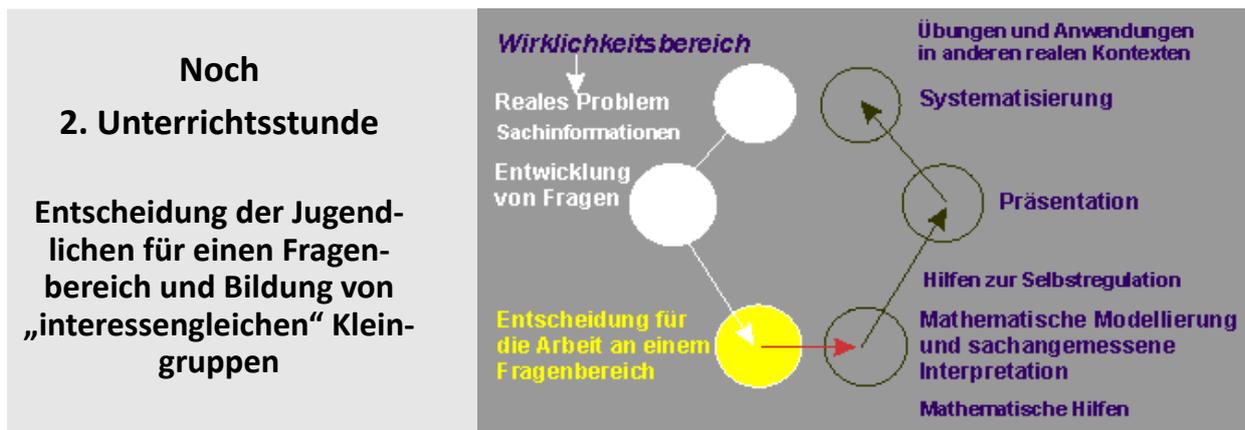
Diese Eingangsdiskussion muss also in jedem Fall stattfinden, damit erstens die späteren mathematischen Modellierungsarbeiten im Problemkontext interpretiert werden können und zweitens auch die Diskussionen nach den Kleingruppen-Präsentationen (etwa in der 7. und 8. Unterrichtsstunde) durch die Jugendlichen in einem Problemzusammenhang geführt werden können.

Die Systematisierung zur funktionalen Modellierung erfolgt erst in der neunten Unterrichtsstunde. Das ist für viele Mathematiklehrerinnen und -lehrer möglicherweise ungewohnt. Aber: Die Systematisierungen können dann auf den zuvor selbstreguliert durchgeführten Modellierungen aufbauen. Vor einer Systematisierung haben dann die Jugendlichen bereits die Erfahrung gemacht, dass funktionale Modellierungsformen dem Erkenntnisgewinn in einem Lernzusammenhang dienen, der handlungsleitende (emanzipatorische) Ziele verfolgt.



In den Kleingruppen, die sich spontan in der ersten Unterrichtsstunde gebildet haben, wird die begonnene Diskussion für etwa 25 Minuten fortgesetzt, etwa mit dem Arbeitsauftrag:

4. Diskutiert miteinander, welche Fragen euch ganz persönlich interessieren. Lasst euch unterstützen durch die so genannte Fragen-Seite: **Wie? Was? Warum? ...?** (das ist immer die Seite ma0xx3.htm)



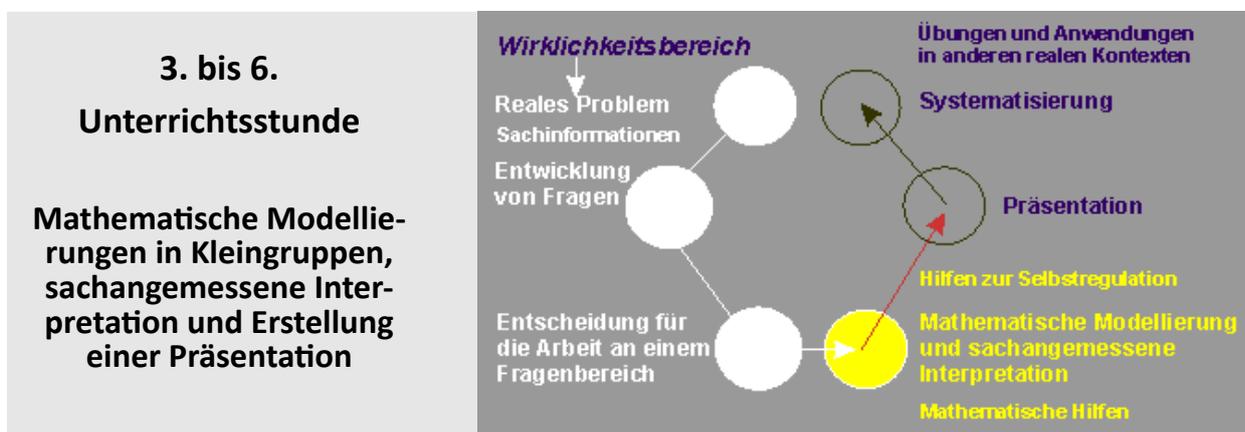
Didaktische, methodische und organisatorische Anregungen

Durch die Fokussierung - des zunächst möglicherweise noch unscharf formulierten Erkenntnisinteresses - auf **präzise Fragestellungen** wird die zielgerichtete Arbeit am gewählten Thema enorm unterstützt. Darüber hinaus wird die Rolle der Mathematik im Rahmen des Problemlösungsprozesses deutlicher. Diese ist nun nicht mehr nur „irgendwie“ auch mit dabei, sondern sie ist das zentrale „Werkzeug“, ohne das sachlich fundierte Antworten auf die gewählte Fragestellung kaum denkbar erscheinen.

Die Lehrkraft bündelt die Fragen und organisiert auf dieser Basis quasi „interessengleiche“ Kleingruppen. Möglich ist auch eine Binnendifferenzierung nach Leistung.

Da die Lehrkraft später aber die funktionale Modellbildung mit linearen, quadratischen oder exponentiellen Funktionen systematisieren will, wird sie durch Beratung in jedem Fall erreichen, dass einige Kleingruppen an einem Aufgabenbereich „**Analyse funktionaler Zusammenhänge und ...**“ (das ist immer die Seite [ma0xx7.htm](#)) arbeiten.

Falls später in der Systematisierungsphase der **Unterschied zwischen funktionaler und dynamischer Modellierung** herausgearbeitet werden soll, sollte mindestens eine Kleingruppe auch an der **Konstruktion und Simulation dynamischer Wechselwirkungen** arbeiten (das ist immer die Seite [ma0xx8.htm](#)).



Die „interessengleichen“ Kleingruppen erhalten nun die folgenden **Arbeitsaufträge**:

5. Arbeitet in den nächsten vier Mathematikstunden und auch Zuhause selbstreguliert (d.h. selbstständig, selbstorganisiert und selbstverantwortet) an den Fragen, die ihr zuvor ausgewählt habt.

Kleingruppe(n) 1: Analysiert den Zusammenhang von A und B ... ([ma0xx7.htm#Gruppe1](#))

Kleingruppe(n) 2: Analysiert den Zusammenhang zwischen ... ([ma0xx7.htm#Gruppe2](#))

Kleingruppe(n) 3: ggf. Konstruiert und simuliert ([ma0xx8.htm](#))

6. Nutzt bei euren Modellierungsarbeiten die euch gegebenen mathematischen Hilfen zur funktionalen (und ggf. dynamischen) Modellierung und auch die Hilfen zum selbstregulierten Arbeiten.
7. Ich werde euch bei eurer Arbeit beobachten und notieren, wie ihr euch in euren Kleingruppen gegenseitig hilft und wie ihr miteinander kommuniziert und kooperiert.
8. Kommt ihr nach einer eingehenden Beratung in eurer Kleingruppe mit eurer Arbeit nicht mehr weiter, so berate ich euch auf Anfrage hin.
9. Stellt eure Modellierungsergebnisse (Arbeitsergebnisse) und Interpretationen in euren Projektmappen dar.
10. Erstellt in eurer Kleingruppe ebenfalls eine Präsentation sowohl eurer Modellierungsergebnisse als auch eurer Interpretationen.

Didaktische, methodische und organisatorische Anregungen

Wiederum können die Seiten ([ma0xx7.htm](#)) und ([ma0xx8.htm](#)) mit den Anforderungen ausgedruckt werden. Sie können aber auch nach Word exportiert werden und auf die konkreten Kleingruppenarbeiten hin umgestaltet werden. Sobald aber während der Modellierungsarbeiten bestimmte Datenbestände oder Informationen gebraucht werden, mathematische Hilfen genutzt werden sollen oder funktional modelliert wird, ist eine Arbeit am Computer notwendig.

Die Lehrkraft sollte sich unbedingt alle anklickbaren Sachinformationen und mathematischen Hilfen zum realen Problem ansehen. Das ist wichtig, um den Kleingruppen, die irgendwo stecken bleiben, Tipps zur selbstregulierten Arbeit geben zu können. Wahrscheinlich muss die Lehrkraft aber schon ab dem Ende der zweiten selbstregulierten Arbeitsstunde immer wieder darauf hinweisen, dass eine Präsentation vor der Klasse zu halten ist. Und dass die Arbeiten nach der vierten selbstregulierten Arbeitsstunde beendet sein müssen.

Während der Vorbereitung des Unterrichts und auch in der Modellierungsphase übernimmt die Mathematiklehrerin und der Mathematiklehrer in Sachfragen zum realen Problem die **Rolle eines kompetenten Laien** ([ma8150.htm](#)). Den Lehrkräften stehen aber auch die Sachin-

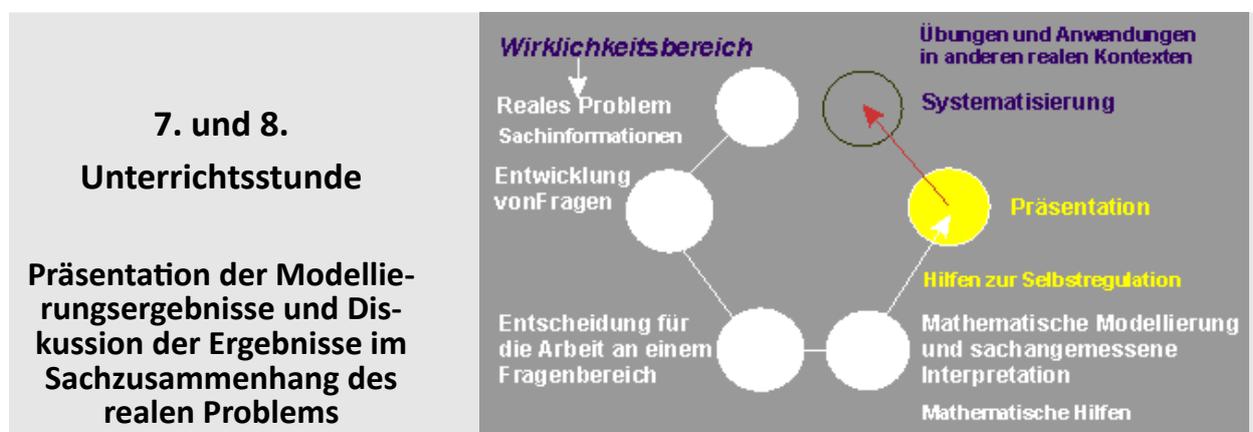
formationen auf den Seiten [ma0xx4.htm](#) bis [ma0xx6i.htm](#) zur Verfügung. Das sind dieselben Sachinformationen, die auch von den Jugendlichen genutzt werden können.

Bei der modellierenden Arbeit werden die Kleingruppen von der Lehrkraft „gecoach“t. Sie hilft den Jugendlichen dabei **allgemeine (prozessorientierte) mathematische Kompetenzen** (siehe Seiten 25 bis 30 in dieser Ausarbeitung oder auch in MMM die Seite [ma8380.htm](#)) zu erwerben oder anzubahnen d.h. unter anderem:

- dass Jugendliche ihre Fragen mit Hilfe der ihnen bis dahin bekannten Mathematik beantworten und dabei u. U. auch neue Fachinhalte entdecken können,
- dass sie ihre Arbeit selbst organisieren und selbst verantworten (begründen) können,
- dass sie eine ansprechende Präsentation erarbeiten und dann auch halten können (eine Präsentation, die ggf. auch in der Klasse ausgehängt werden kann) und
- dass sie Kommunikations- und Kooperationsregeln einhalten können.-

Werden die prozessorientierten (oder allgemeinen) mathematischen Kompetenzen bewertet, so sollten die Jugendlichen dies vor ihrer Arbeit wissen.

An dieser Stelle sei aber darauf verwiesen, dass prozessorientierte Kompetenzen nur in einem komplexeren Arbeits- oder Lern-Prozess angebahnt und gelernt werden können.



Die Lehrkraft stimmt sich mit den Kleingruppen ab, in welcher Reihenfolge die Präsentationen vor der Klasse erfolgen. Dann erteilt sie etwa die folgenden **Arbeitsaufträge**:

11. Jede Kleingruppe stellt ihre Modellierungsergebnisse vor der Klasse so vor, dass alle anderen in der Klasse sie auch verstehen und nachvollziehen können. Also: Lasst immer genügend Zeit, damit die Anderen sich auch Notizen machen können. Hetzt nicht durch euren Vortrag.
12. Hilfen findet ihr unter „Anregungen zur Präsentation der Arbeitsergebnisse“ auf der Eingangsseite jedes realen Problems.

13. (Ggf.: Ich habe vor, die Präsentation zu bewerten.)
14. Jede Kleingruppe beleuchtet in ihrem Vortrag das reale Problem unter einem anderen Gesichtspunkt. Alle diese hängen aber, wie wir in der Eingangsdiskussion des Problems bereits festgestellt haben, miteinander zusammen. Und genau das wollen wir gemeinsam diskutieren, nachdem alle Vorträge gehalten sind. So wollen wir erreichen, dass es nicht bei der Summe (Addition) der Einzelbeiträge bleibt, sondern die Diskussion ein neues Ganzes erwirkt.

Didaktische, methodische und organisatorische Anregungen

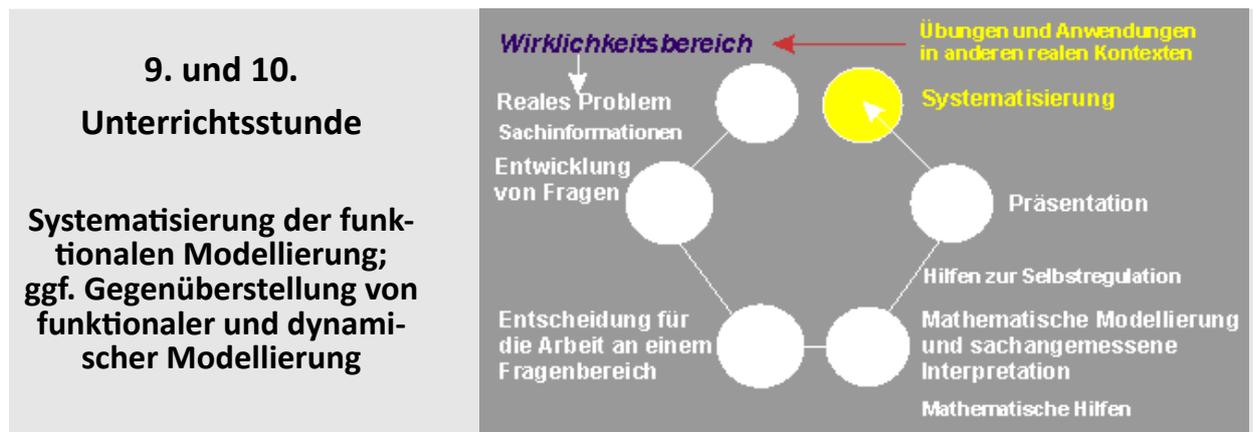
Auch das Präsentieren-Können ist eine wichtige prozessorientierte (allgemeine) mathematische Kompetenz. Die Erstellung eines präsentierbaren Produktes braucht also Zeit.

Die Jugendlichen sollen/sollten durch die Gesamtheit der Präsentationen zur Erkenntnis von Zusammenhängen und Wechselwirkungen gelangen, deren Bewertungen für ihr eigenes gesellschaftliches Handeln bedeutungsvoll sein können (emanzipatorische Kompetenzen!). Sie können die mathematischen Modellierungen als eine Erkenntnishilfe zur Bewertung des Problems erleben. Der Mathematikunterricht bekommt einen anderen Sinn als nur den, lediglich Selbstzweck zu sein. Die Jugendlichen können auch erleben, dass arbeitsteilige Teamarbeit produktiv ist und keine „Zeit“ verschwendet.

In einem abschließenden Gespräch klärt die Lehrkraft auch noch, welchen Wert eine arbeitsteilige Arbeit innerhalb eines Teams hat.

Nach diesen 3 Wochen (bei drei Mathematikstunden pro Woche) sollte in der Regel keine Klassenarbeit geschrieben werden.

Zu Beginn der projektorientierten Unterrichtsphase sollte mit den Jugendlichen aber vereinbart werden, was zur Leistungsbewertung am Ende herangezogen wird (z.B. die Projektmappe, die Präsentation, die Beobachtungen zum Arbeits- und Sozialverhalten ...). Soll eine Klassenarbeit geschrieben werden, dann bieten sich aber nur Aufgaben an, die auch das zuvor Gelernte abprüfen. Solche Aufgaben sind zu finden unter [Erörterung möglicher Lösungen zu realen Problemen und \(Test\)Aufgaben zur kompetenzorientierten Diagnose \(ma8800.htm\)](#). Anmerkung: Die Anzahl der Aufgaben ist zurzeit (Mitte 2009) noch gering, sie wird aber ständig erweitert.



Didaktische, methodische und organisatorische Anregungen

Die Mathematiklehrkraft wiederholt in einem **fragend-entwickelnden** Unterricht noch einmal mit ihren Worten je eine Lösung der Gruppen 1 und 2. Sie lenkt **wiederholend** den Blick auf:

- die graphischen Darstellungen, insbesondere auf die **Punkt-Linien-Diagramme**,
- die ggf. selbst gefundenen **Terme**, die den Verlauf approximieren,
- die ggf. mit Excel erstellten **approximativen Trendfunktionen**,
- die **Extrapolationen** und ihre Bedeutung für Trendaussagen und
- die ggf. erstellten Korrelationen.

Auf dieser Basis systematisiert und präzisiert die Lehrkraft die lineare, quadratische **oder** rationale Funktion **oder** die Exponentialfunktion **und** den Funktionsbegriff **oder** ggf. auch eine Eigenschaft von Funktionen (etwa die Differenzierbarkeit). Wichtig ist, dass in Anwendungszusammenhängen die Funktionen immer nur über einer diskreten, endlichen Zahlenmenge definiert sind. Wird eine Prognose erstellt, so muss angenommen werden, dass der funktionale Zusammenhang sich stetig fortsetzt. Wird eine Ableitungsfunktion erstellt, so muss angenommen werden, dass die Funktion über der Menge der reellen Zahlen definiert ist.

Während dieser Systematisierung sollten die erstellten Modelldarstellungen für alle sichtbar sein. Entweder erhalten alle Schülerinnen und Schüler der Klasse eine Fotokopie der Modelle oder die Modelle werden auf einer „Tapete“ aufgezeichnet und in der Klasse ausgehangen.

Anregungen zur Systematisierung und weiteren Anwendung des Gelernten finden die Schülerinnen und Schüler sowie die Lehrkraft auf den Seiten:

- [Schlussrechnen und lineare Funktionen](#) (ma3200.htm)
- [Quadratische, rationale und Wurzel-Funktionen](#) (ma3800.htm)
- [Exponentialfunktionen sowie logarithmische und logistische Funktionen](#) (ma4400.htm)

htm) und

- [Grundbegriffe und Eigenschaften von Funktionen](#) (ma6200.htm)

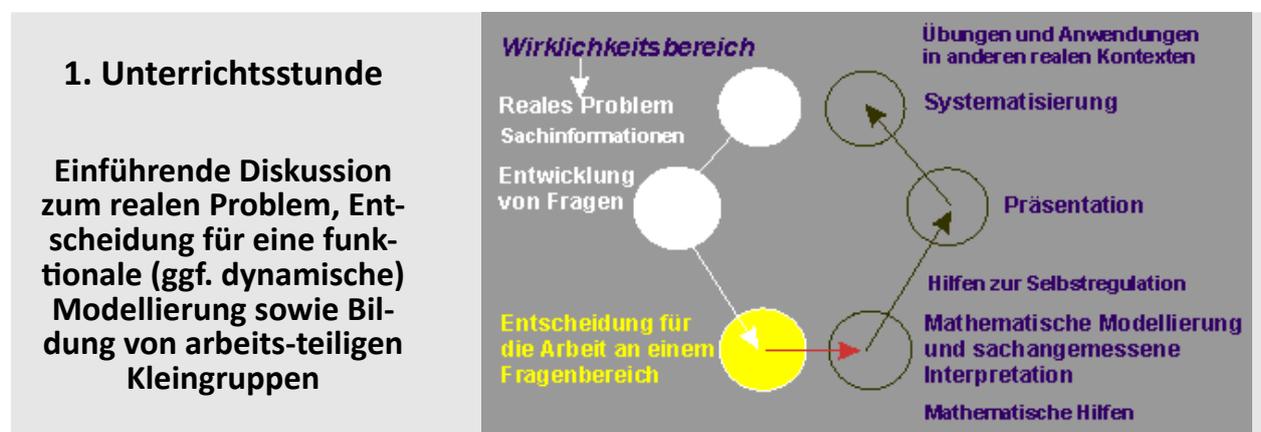
Zur **Gegenüberstellung von dynamischer und funktionaler Modellierung** wiederholt die Lehrkraft auch die Ergebnisse der Kleingruppe(n) 3 und erarbeitet in fragend-entwickelnder Form die folgenden Feststellungen:

- **Funktionale Modellierungen** führen zu Beschreibungen von Verläufen in der Vergangenheit und versuchen über Approximationen mit Trendlinien zu Prognosen für die nahe Zukunft zu gelangen. Prognosen sind immer unsicher! Erkenntnisse dieser Art sagen aber, wie es war und wie es ggf. sein wird, wenn sich die Bedingungen nicht ändern.
- **Dynamische Modellierungen** führen zu Beschreibungen des Systemverhaltens von zweckbedingt untersuchten Modellen und erlauben Aussagen darüber, wie eine Veränderung der „Stellgrößen“ im System wirkt, in welcher Richtung ihre Veränderung verheerende oder günstige Auswirkungen hat. Erkenntnisse dieser Art, sind in der Regel qualitativer Natur. Sie können aber auch handlungsleitend sein.

Natürlich kann bei einer ersten Einführung in die funktionale Modellierung auf einen Vergleich von funktionaler und dynamischer Modellierung verzichtet werden. Bei einer weiteren Anwendung der funktionalen Modellierung sollte dieser Vergleich aber durchgeführt werden.

4.2 Die funktionale Modellierung in der Anwendungsphase des Mathematikunterrichts

In diesem Unterricht sind die drei ersten Phasen des projektorientierten zu einer zusammengefasst. Die Vorgaben durch die Lehrkraft sind am höchsten und die Wahlmöglichkeiten durch die Lernenden am geringsten. Die Phase der Systematisierung fehlt, da hier davon ausgegangen wird, dass sie bereits erfolgt ist. Wenn das aber nicht der Fall sein sollte, so kann die Phase der Systematisierung diesem Verlauf hinzugefügt werden.



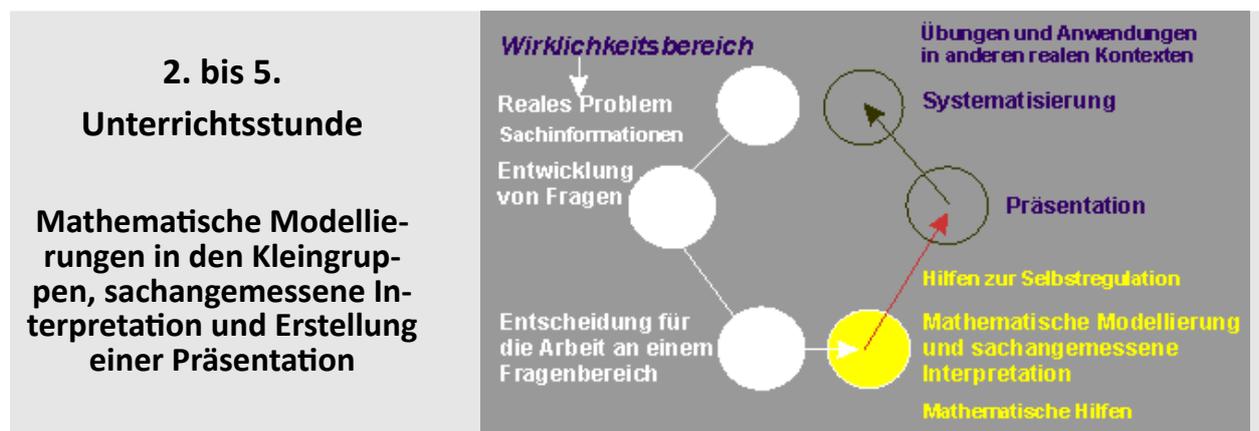
Die Lehrkraft führt mit der Klasse ein Gespräch zum realen Problem. Sie lässt sich dabei unterstützen durch **eine mögliche Bild-Diskussionen oder eine „Geschichte“ zur Problematik** (immer die Seite ma0xx0a.htm) oder/und durch **einige Blicke auf die Problemlage** (immer die Seite ma0xx2.htm). Für den Rest der ersten Unterrichtsstunde erhalten die Jugendlichen die folgenden Arbeitsaufträge:

1. Setzt euch auseinander mit den Anforderungen/Aufgaben auf der Seite: „**Analyse von Zusammenhängen zwischen A und B und deren Folgen ...**“ (immer die Seite ma0xx7.htm) und ggf. mit den Aufgaben auf der Seite: „**Konstruktion und Simulation ...**“ (immer die Seite ma0xx8.htm).
2. Entscheidet euch in eurer Kleingruppe für eine der möglichen funktionalen (oder ggf. dynamischen) Modellierungs-Aufgaben. Ich werde euch dabei beraten.
3. Legt eine Arbeitsmappe an, in der ihr alle von euch benutzen „Arbeitsblätter“, eure Modellierungs- und Diskussionsergebnisse und auch eure Präsentation abheftet. Schreibt auf, was euch Schwierigkeiten im Verständnis bereitet hat.

Didaktische, methodische und organisatorische Anregungen

Die Jugendlichen arbeiten auch schon in dieser 1. Unterrichtsstunde, so weit es geht, selbstreguliert und nutzen die dazu bereit gestellten mathematischen Hilfen.

Alle weiteren Anregungen sind dieselben wie beim projektorientierten Unterricht.

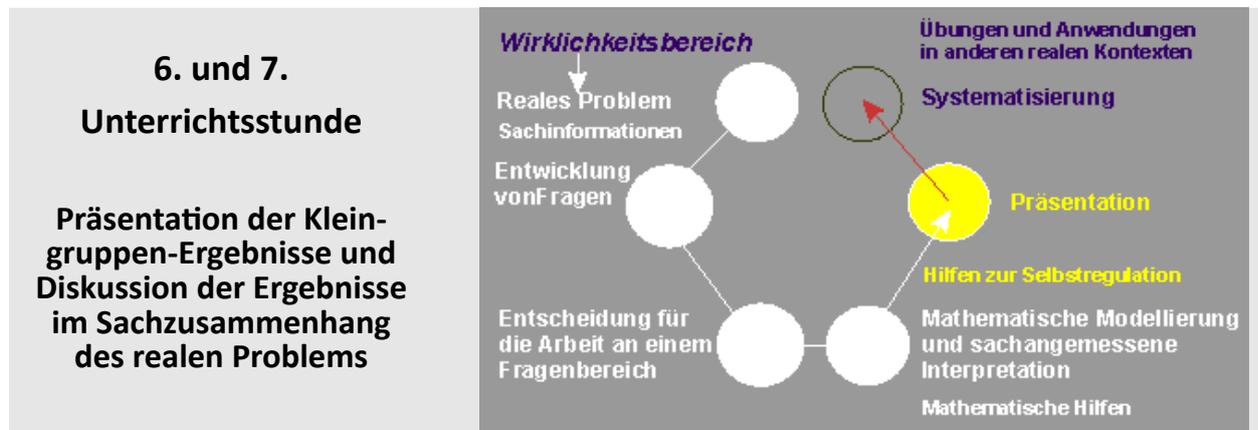


Die **Arbeitsaufträge** sind dieselben wie beim projektorientierten Unterricht.

Didaktische, methodische und organisatorische Anregungen

Die Lehrkraft wird beratend in die Bildung der arbeitsteiligen Kleingruppen eingreifen und Vorschläge zur Bearbeitung von Aufgaben machen.

Alle weiteren Anregungen sind gleich mit denen beim projektorientierten Unterricht.



Die **Arbeitsaufträge** sind wieder dieselben wie beim projektorientierten Unterricht.

Didaktische, methodische und organisatorische Anregungen

Die Mathematik-Lehrkraft nutzt die Präsentationen der Gruppen 1 und 2 (und ggf. der Gruppe 3) um die bei der Lösung genutzten Funktionen (bzw. die dynamische Modellierung) zu vertiefen oder noch einmal zu wiederholen.

Alle Anregungen sind gleich mit denen beim projektorientierten Unterricht.



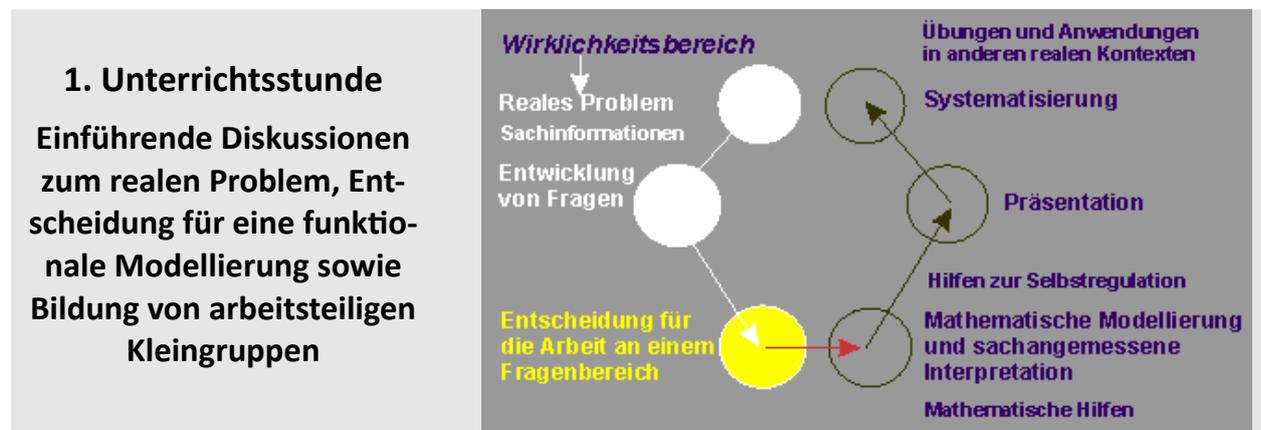
5. Anwendungen der funktionalen Modellierung in der Anwendungsphase des Mathematik-Unterrichts

5.1 Anwendungen der linearen Funktion im Kontext des realen Problems: „Machtlos gegen Gewalt“

Nach Einführung und Festigung der linearen Funktion in **Klasse 7 oder 8** kann diese in der Anwendungsphase des Mathematikunterrichts z.B. bei einer Analyse zum realen Problem [„Machtlos gegen Gewalt“](#) (ma0110.htm) angewendet werden.

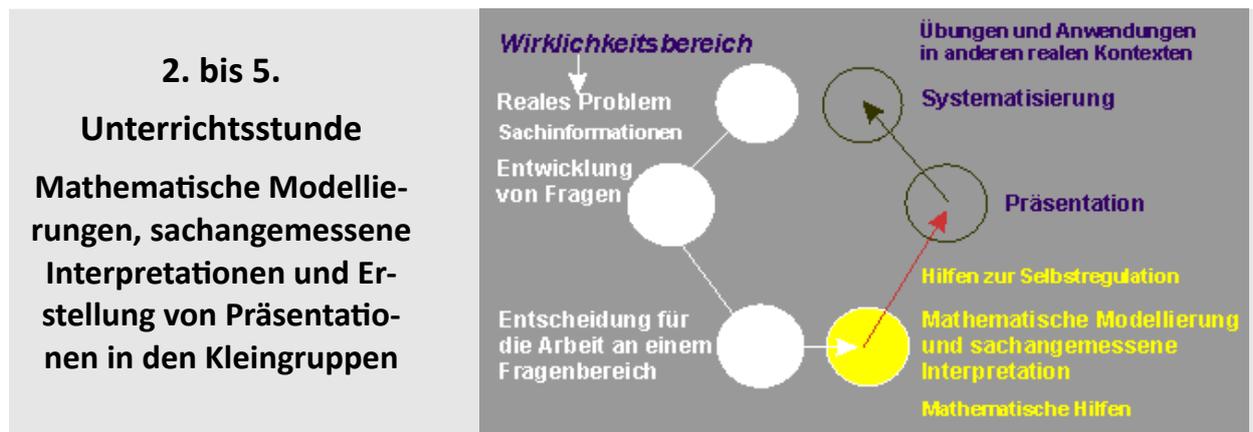
5.1.1 Einbettung der funktionalen Modellierungsarbeiten in einen anwendungsorientierten Unterrichtsablauf

Der **idealtypische Unterrichtsablauf** ist mit didaktischen, methodischen und organisatorischen Hinweisen im **Kapitel 4.2** ausführlich dargestellt. Hier wird die funktionale Modellierung nur in aller Kürze in den Ablauf des Unterrichts eingebettet.



Die Mathematiklehrerin oder der Mathematiklehrer führt mit der Klasse ein Gespräch zum gesellschaftlich bedeutungsvollen Problem der „Gewalt in unserer Gesellschaft“ und lässt sich dabei unterstützen durch:

- eine [mögliche Bild-Diskussion](#) (ma0110a.htm) und/oder
- [kurze stimulierende Texte](#) und
- einige [„Blicke“ auf die allgegenwärtige Gewalt](#) (ma0112.htm).

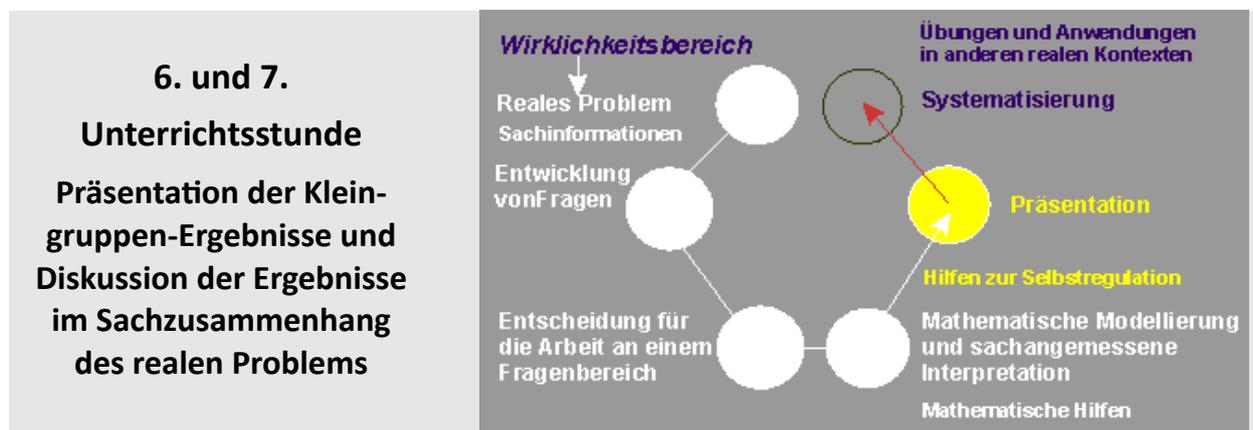


Die Mathematiklehrerin oder der Mathematiklehrer schlägt zwei **Arbeitsaufträge** zur funktionalen Modellierung mit linearen Funktionen in **arbeitsteiligen Kleingruppen** vor.

Kleingruppe(n) 1: Analysen und Vergleiche zur Kriminalität von Kindern und Jugendlichen (ma0117.htm#Gruppe1)

Kleingruppe(n) 2: Analysen und Vergleiche zur Straffälligkeit von erwachsenen Deutschen und Ausländern (ma0117.htm#Gruppe2)

Ggf. **Kleingruppe(n) 3:** Konstruktion und Simulation der Informationsweitergabe in hierarchischen Netzen zum Zwecke einer Solidarisierung gegen Gewalt (ma0118.htm#Gruppe1)



Anmerkungen:

Nur die Arbeit der Kleingruppe(n) 2 „Analysen und Vergleiche zur Verurteilung von erwachsenen Deutschen und Ausländern“ wird in der folgenden Darstellung beschrieben.

Eine vollständige Lösung zu diesen Arbeiten mit Verlinkungen auf das reale Problem sowie auf die erwerbenden Kompetenzen und auf die interaktiven ExcelTabellen kann in MMM auf Seite ma1116.htm eingesehen werden. Eine Lösung zur dynamischen Modellierung ist in MMM auf Seite ma1118.htm zu finden.

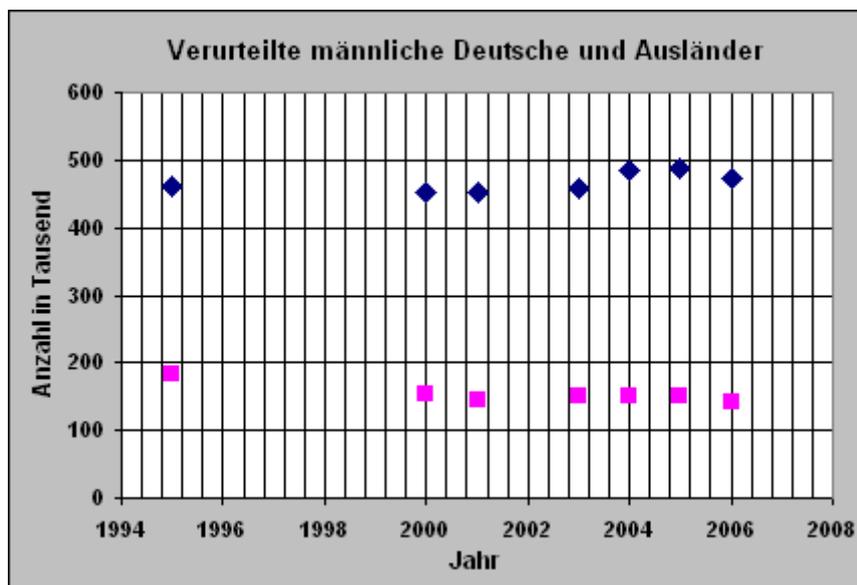
5.1.2 Vom Datensatz zu Punkt-Diagrammen

Hier wird der Datensatz „Anzahl der verurteilten Deutschen und Ausländer“ (jeweils in Tausend) beispielhaft funktional analysiert.

Jahr	männliche Deutsche	männliche Ausländer	weibliche Deutsche	weibliche Ausländer
1995	460,669	182,587	91,484	23,313
2000	452,798	154,348	98,092	26,167
2001	451,938	144,520	96,209	24,987
2003	457,541	149,554	100,920	27,317
2004	485,508	151,218	110,493	27,926
2005	488,218	150,736	112,301	28,466
2006	471,754	143,059	108,448	27,323

Quelle: Strafverfolgungsstatistik im früheren Bundesgebiet (einschließlich Ostberlin); Statistisches Bundesamt, Wiesbaden 2007

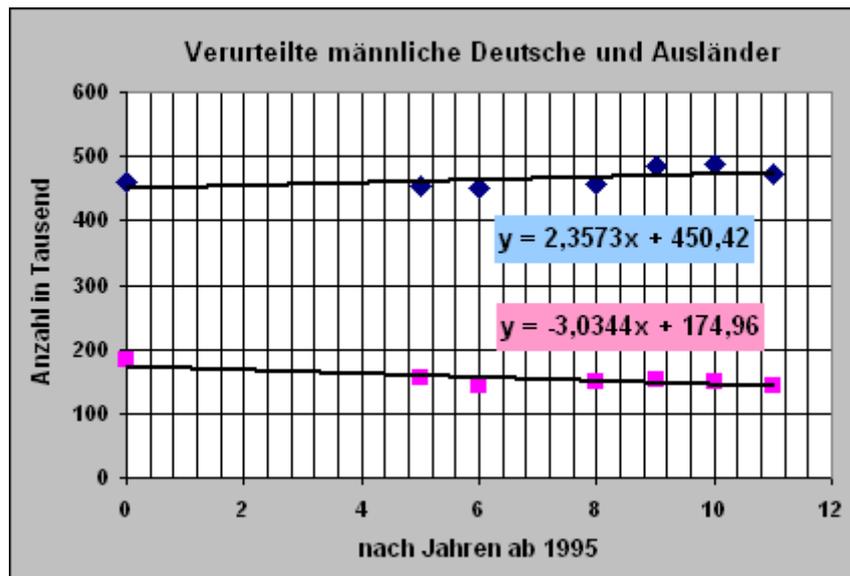
Viele weitere Datensätze sind auf der Seite [Datensätze zur Kinder- und Jugendkriminalität sowie zur Verurteilung von Erwachsenen](#) (ma0114.htm) vorgegeben und können/sollten zur Vervollständigung der Interpretation von Gewalt in unserer Gesellschaft ebenfalls funktional analysiert und bewertet werden.



männliche Deutsche = blaue Raute, männliche Ausländer = rotes Quadrat.

5.1.3 Approximationen mit linearen Trendfunktionen

Der Verlauf der Punkte im vorstehenden Punktdiagramm wird mit Hilfe von Excel durch lineare Trendlinien bzw. Trendfunktionen approximiert. (Siehe hierzu die detaillierten Informationen in MMM im „[Kurs 41: Wir erzeugen zu einem Punktdiagramm eine Trendlinie](#)“, ma9076.htm).



Analog erfolgen die Darstellungen und Approximationen zur Entwicklung der Anzahl der verurteilten weiblichen Deutschen und Ausländer, der männlichen und weiblichen Deutschen sowie der männlichen und weiblichen Ausländer.

5.1.4 Trendaussagen zur Entwicklung der Zahl der Verurteilten

Eine Extrapolation auf der Grundlage der linearen Funktionen ergibt für die Jahre 2011 und 2016 (also in 5 und 10 Jahren) die folgenden möglichen Zahlen:

Jahr	in Jahren	männliche Deutsche	männliche Ausländer	weibliche Deutsche	weibliche Ausländer
2011	16	488,1368	126,4096	119,6876	30,5016
2016	21	499,9233	111,2376	129,2006	32,7246

Die Zahlen für das Jahr 2011 lassen sich schon heute (im Jahr 2010) relativ gut über eine Recherche mit der Anzahl verurteilter männlichen Deutschen und Ausländer im Jahr 2009 überprüfen. Diese Überprüfung sagt dann etwas darüber aus, wie gut die Trendaussage mittels einer Extrapolation ist. Außerdem wäre es möglich, die Trendzahlen mittels eines [selbst recherchierten](#) (ma0116i.htm) weiteren Datensatzes des Statistischen Bundesamtes zu überprüfen.

5.1.5 Eine „vorschnelle“ Interpretation der Entwicklungen

Werden die Entwicklungen für verurteilte männliche Deutsche mit den verurteilten männlichen Ausländern verglichen, so kann festgestellt werden, dass die Anstiege $m = 2,3573$ für männliche Deutsche und $m = -3,0344$ für männliche Ausländer verschieden sind. Der erste Anstieg ist positiv der zweite ist negativ. Die Anzahl der verurteilten Deutschen nimmt zu, die der verurteilten Ausländer nimmt ab. In weiteren 10 Jahren wird die Zahl der männlichen deutschen Verurteilten nahezu 500.000 und die der männlichen Ausländer aber nur noch nahezu 110.000 betragen. In 10 Jahren gibt es also etwa 5-mal so viele verurteilte männliche Deutsche als männliche Ausländer. *(Weitere mögliche Vergleiche siehe in MMM auf Seite ma1116.htm.)*

Mit diesem Vergleich kann also vorerst die Schlussfolgerung gezogen werden, dass die deutschen Männer viel häufiger straffällig und verurteilt werden, als die männlichen Ausländer. Da die Anzahl deutscher Männer aber viel größer ist als die Anzahl der männlichen Ausländer, wird der Vergleich erweitert.

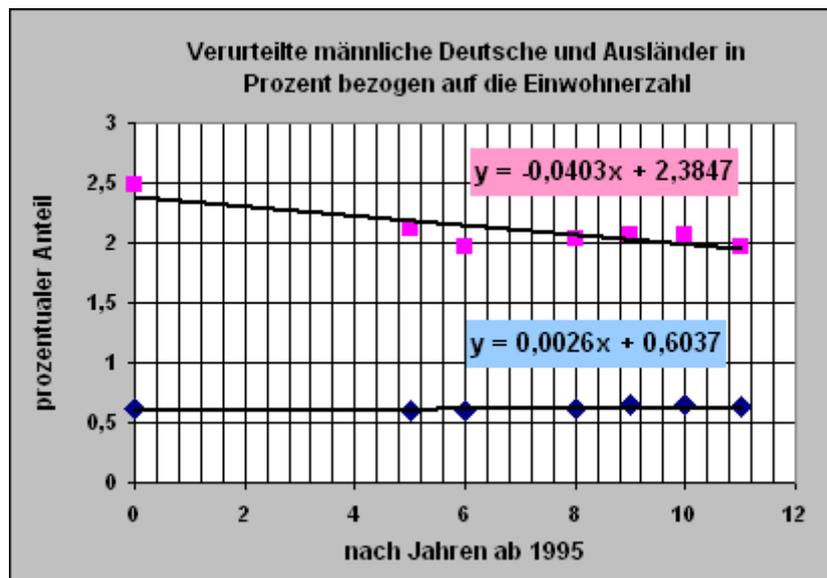
5.1.6 Berechnung und Darstellung der relativen Zahlen von Verurteilten

Nunmehr werden in einer Excel-Tabelle die relativen Zahlen (die Prozentsätze) von verurteilten männlichen Deutschen und Ausländern berechnet und zwar bezogen auf die jeweiligen Einwohnerzahlen.

Analog erfolgt die Berechnung der relativen Zahlen von verurteilten weiblichen Deutschen und Ausländern, von verurteilten männlichen Deutschen und weiblichen Deutschen sowie von verurteilten männlichen Ausländern und weiblichen Ausländern.

Jahr	in Jahren	männl. Deutsche		männl. Ausländer		Bevölkerungszahlen		
		absolut	in %	absolut	in %	Gesamt	Deutsche	Ausländer
1995	0	460669	0,618	182587	2,487	81817000	74474000	7343000
2000	5	452798	0,604	154348	2,124	82260000	74992000	7268000
2001	6	451938	0,602	144520	1,975	82440000	75122000	7318000
2003	8	457541	0,609	149554	2,035	82537000	75189000	7348000
2004	9	485508	0,646	151218	2,060	82532000	75190000	7342000
2005	10	488218	0,649	150736	2,068	82501000	75213000	7288000
2006	11	471754	0,629	143059	1,972	82315000	75059000	7256000

Im folgenden Punkt-Diagramm sind die relativen Zahlen dargestellt. Sie werden wiederum durch lineare Trendfunktionen approximiert.



5.1.7 Eine erneute Interpretationen zur Entwicklung der Anzahl der Verurteilten

Werden nun die Entwicklungen mittels dieser relativen Zahlen verglichen, so lässt sich feststellen:

1. Der Trend der Entwicklungen bleibt erhalten. Denn auch die relativen Zahlen für verurteilte männliche Deutsche steigen und die relativen Zahlen für verurteilte männliche Ausländer sinken.
2. Die Prozentzahl der verurteilten männlichen Ausländer ist im Jahr 1995 etwa 5-mal und im Jahr 2005 etwa 4-mal so hoch wie der der männlichen Deutschen. Insgesamt bleibt er höher und hat sich auch in weiteren 10 Jahren noch nicht angeglichen.

Das obige Urteil, dass „die deutschen Männer viel häufiger straffällig und verurteilt werden, als die männlichen Ausländer“, war somit vorschnell und lässt sich so nicht halten.

Auch diese neue Erkenntnis kann im Weiteren noch hinterfragt werden:

- Welche Erkenntnisse liefert z.B. ein Herausrechnen solcher Straftaten, (z.B. Verstöße gegen das Asylrecht) die nur Ausländer begehen können?
- Welche Erkenntnisse liefert eine Berücksichtigung der Altersverteilungen in den Gruppen der Ausländer und Deutschen?
- **Und: Warum gelingt es der deutschen Gesellschaft nicht, unsere ausländischen Mitbürger so zu „integrieren“, dass sich ihre Einstellungen zum Recht angleichen?** Denn auch im Ausland sind Raub und Gewaltanwendungen Straftaten. Und diese Straftaten sind es, die in Überzahl zu einer Verurteilung führen.

Die mathematische Modellierung endet also in Nachdenklichkeiten und müsste zu neuen Untersuchungen oder zur Überlegung führen, welchen Beitrag die Klasse dazu leisten kann. (Siehe hierzu auch das Heft [„Kriminelle Ausländer?“](#) der MUED).

Verweise auf weitere Lösungen in MMM zur Anwendung u.a. der linearen Funktion:

- ▶ [bei einer Analyse der Geburten- und Sterberaten in Deutschland](#)
- ▶ [bei Analysen zur Veränderung des Arbeitsmarktes](#)
- ▶ [bei Analysen zur heutigen wirtschaftlichen Entwicklung in Deutschland sowie u.a in China und in Indien](#)
- ▶ [bei Analysen zur Entwicklung von Armut und Reichtum in unserer Gesellschaft \(siehe Kapitel 2 in dieser Schrift\)](#)
- ▶ [bei Analysen der extremen Verschuldung der „armen Länder“](#)
- ▶ [bei Analysen der extremen Armut, des Hungers, der Unterernährung und deren Folgen \(siehe Kapitel 2 in dieser Schrift\)](#)
- ▶ [bei Analysen zur Energieeffizienz am Beispiel der Kosten und des Energieumsatzes bei Glüh- und Energiesparlampen](#)
- ▶ [bei Analysen zur Heftigkeit der Überfischung](#)
- ▶ [bei Analysen zum Fischverzehr sowie zur Entwicklung von Aquakulturen](#)

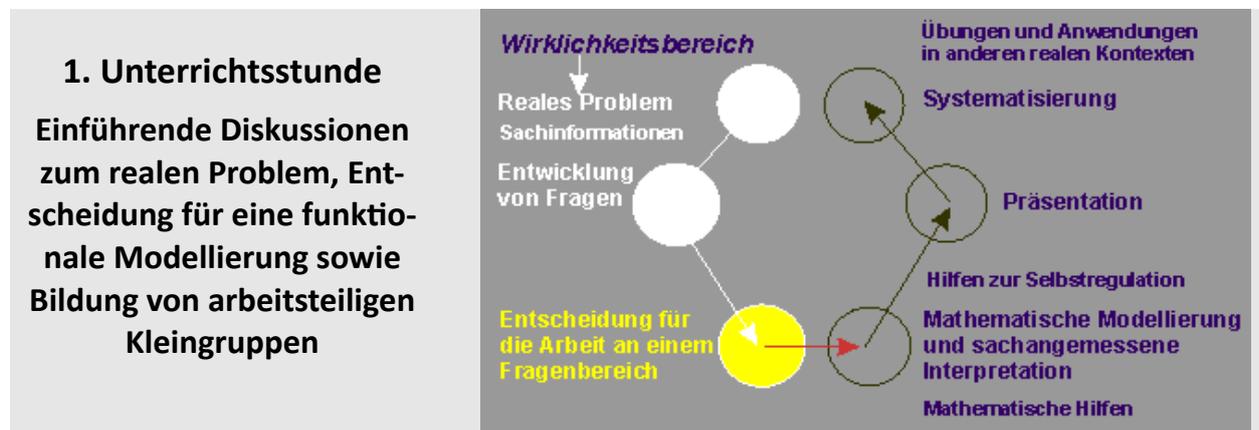
[Erörterung von Lösungsideen zur Anwendung linearer Funktionen](#)

[Test-Aufgaben zur kompetenzorientierten Diagnose](#)

5.2 Anwendungen der linearen und quadratischen Funktion im Kontext des realen Problems: „Arbeit für alle !?!“

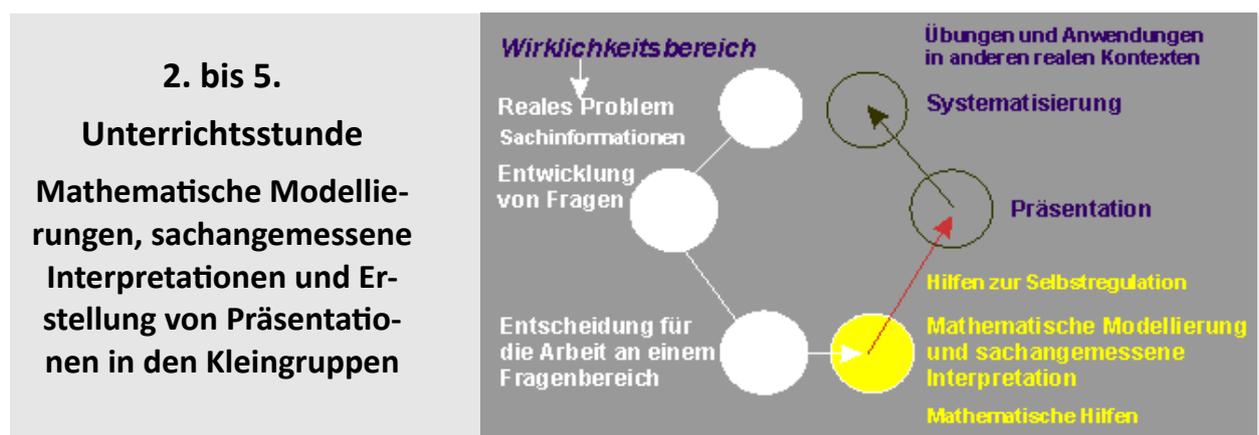
Nach Einführung und Festigung der quadratischen Funktion in **Klasse 8 oder 9** kann diese – wie auch die lineare Funktion - in der Anwendungsphase des Mathematikunterrichts z.B. bei einer Analyse zum realen Problem [„Arbeit für alle !?!“](#) (ma0170.htm) angewendet werden.

5.2.1 Einbettung der funktionalen Modellierungsarbeiten in einen anwendungsorientierten Unterrichtsablauf (siehe Kapitel 4.2)



Die Mathematiklehrerin oder der Mathematiklehrer führt mit der Klasse ein Gespräch zum gesellschaftlich bedeutungsvollen Problem des „Schwindens der Arbeit in unserer Gesellschaft“ und lässt sich dabei unterstützen durch

- eine [mögliche Bild-Diskussion](#) (ma0170a.htm) oder
- [Ausdrücke von Verzweiflung und Frust bei Jugendlichen](#) (ma0170a.htm#Frust),
- [„Blicke“ auf das komplexe Problem von zukünftiger Arbeit](#) (ma0172.htm).



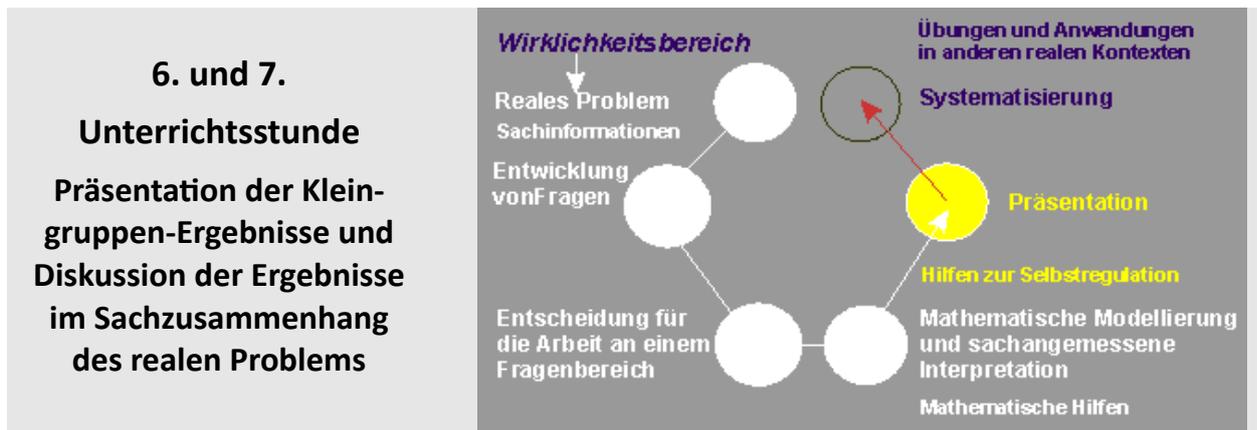
Die Mathematiklehrerin oder der Mathematiklehrer schlägt zwei **Arbeitsaufträge** zur funktionalen Modellierung in **arbeitsteiligen Kleingruppen** vor.

Kleingruppe(n) 1: Analysen zur Veränderung des Arbeitsmarktes in Deutschland (ma0177.htm#Gruppe1)

Kleingruppe(n) 2: Analysen u.a. zur Arbeitslosigkeit nach Problemgruppen, zur Entlastung

des Arbeitsmarktes, zu den Arbeitskosten und zur Abwanderung von Arbeit (ma0177.htm#Gruppe2)

Ggf. **Kleingruppe(n) 3**: Konstruktion und Simulation von Wechselwirkungen zwischen Bruttosozialprodukt und Arbeitsplatzangebot (ma0178.htm#Gruppe1)



Anmerkungen:

Nur die Arbeit der Kleingruppe(n) 1 wird in der folgenden Darstellung beschrieben. Eine vollständige Lösung zu diesen Arbeiten mit Verlinkungen auf das reale Problem sowie auf die erwerbbaeren Kompetenzen und auf die interaktiven ExcelTabellen kann in MMM auf Seite [ma1176.htm](#) eingesehen werden. Dynamische Modelle zu Wechselwirkungen zwischen Bruttosozialprodukt und Arbeitsplatzangebot sind auf der Seite [ma1178.htm](#) einsehbar.

5.2.2 Vom Datensatz zu Punkt-Diagrammen

Der folgende Ausschnitt stammt aus einem umfassenden Datensatz „Wirtschaftswachstum, Erwerbstätige und Arbeitslose in Deutschland“ von 1949 bis 2007. (Quelle der Daten „Statistische Bundesamt Deutschland“.) Der vollständige Datensatz und viele weitere Datensätze zur selben Thematik sind vorgegeben auf den Seiten:

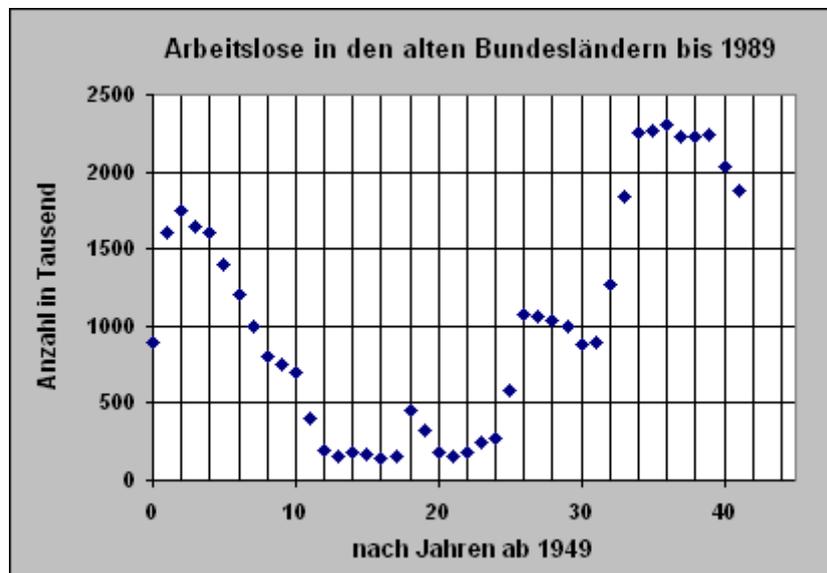
- [„Daten und Quoten zum Wirtschaftswachstum ... und zur Arbeitslosigkeit“](#) (ma0174.htm)
- [„Arbeit für alle: Ein leeres Versprechen? Daten und Fakten“](#) (ma0175.htm)

Wirtschaftswachstum Rate	Jahr	nach Jahren	nach Jahren	Bevölkerung in Tsd	Erwerbstätige in Tsd	Arbeitslose alte BRD in Tsd	Arbeitslose Gesamt in Tsd	Arbeitslosenquote in %
	1949	0				900	900	
	1950	1				1600	1600	

....

3,6	1989	40		61872	27742	2038	2038	3,3
5,7	1990	41		63062	29334	1883	1883	3
5	1991	42	0	79830	38454	1689	2602	3,3
5	1992	43	1	79830	38454	1689	2602	3,3
2,2	1993	44	2	80438	37878	1808	2979	3,7

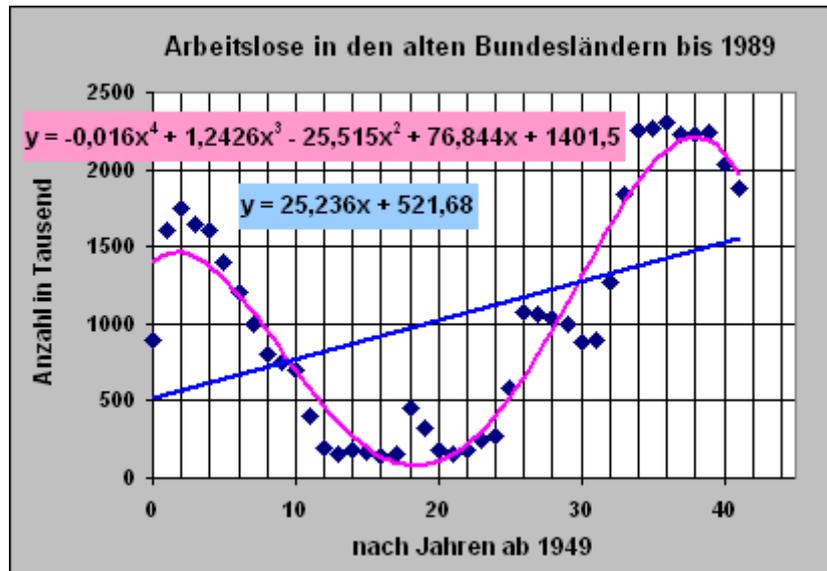
Nacheinander werden die Entwicklungen des Arbeitsmarktes in den alten Bundesländern von 1949 bis 1989 und dann nach der Wiedervereinigung bis 2008 betrachtet. Die Entwicklung der Zahl der Arbeitslosen und Erwerbstätigen sowie die Arbeitslosenquoten werden in Punkt-Diagrammen dargestellt.



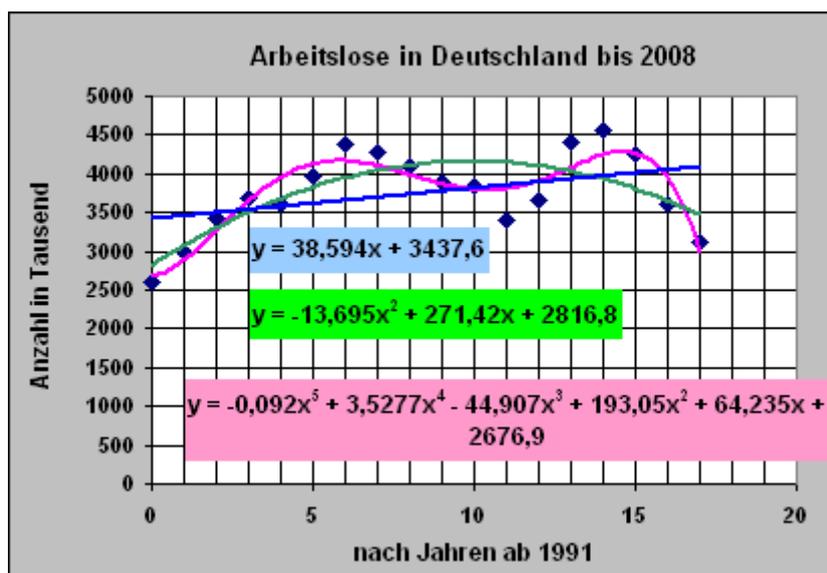
Viel mehr Punkt-Diagramme zur Entwicklung des Arbeitsmarktes sind in MMM in ExcelMap-pen zu finden, die von der Seite ma1176.htm aufgerufen werden können.

5.2.3 Approximationen mit linearen und ganz rationalen Trendfunktionen

Der Verlauf der Entwicklungen von 1949 bis 1989 wird mit einer ganz rationalen Funktion 4ten Grades sowie mit einer linearen Funktion approximiert.

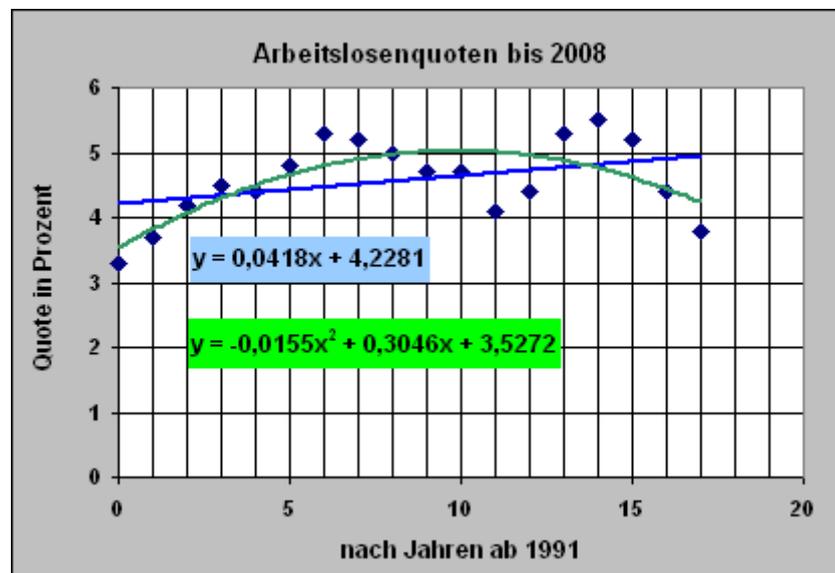


Die lineare Approximation beschreibt von 1949 an eine durchgängige Zunahme an Arbeitslosen: mal mehr, mal weniger!



Die polynomische Approximation 5ten Grades in der vorstehenden Darstellung zur Arbeitslosigkeit von 1991 bis 2008 lässt schließlich eine extreme Abnahme der Arbeitslosigkeit für die folgenden Jahre erwarten. Sie scheint daher für eine Extrapolation nicht geeignet. Die quadra-

tische sagt dagegen einen langsamen Rückgang, die lineare Approximation sogar eine wachsende Entwicklung der Arbeitslosenzahlen – sowie auch der Arbeitslosenquoten - voraus.



5.2.4 Trendaussagen zur Entwicklung der Arbeitslosenzahlen und -quoten

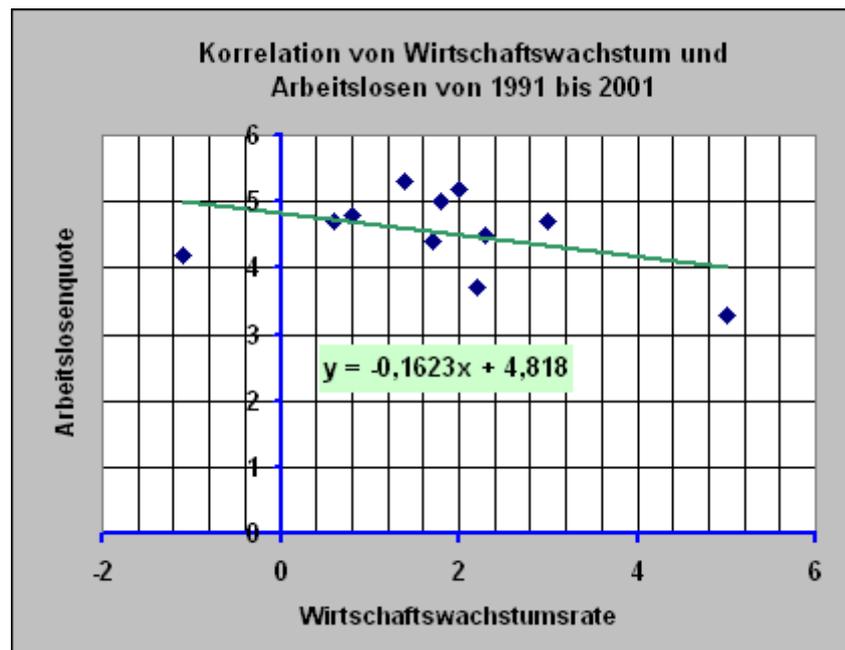
Eine Extrapolation der Arbeitslosenzahlen und der Arbeitslosenquoten auf der Grundlage der beiden letzten Modellierungen ergibt die folgenden Zahlen:

Extrapolation der Arbeitslosenzahlen					
Jahr	nach Jahren	linear	quadratisch	Differenz	arithm_Mittel
2009	18	4132,292	3265,18	867,112	3698,736
2010	19	4170,886	3029,885	1141,001	3600,3855
2011	20	4209,48	2767,2	1442,28	3488,34
Extrapolation der Arbeitslosenquoten					
Jahr	nach Jahren	linear	quadratisch	Differenz	arithm_Mittel
2009	18	4,9805	3,988	0,9925	4,48425
2010	19	5,0223	3,7191	1,3032	4,3707
2011	20	5,0641	3,4192	1,6449	4,24165

Die linearen und quadratischen Prognosen können als zwei mögliche Szenarien für zukünftige Entwicklungen gedeutet werden, wobei die Differenz der Prognosen als zunehmende Unsicherheit für eine Prognose interpretiert werden kann. Das arithmetische Mittel der beiden Prognosen zur Arbeitslosenzahl und Arbeitslosenquote nimmt zwar ab, bleibt jedoch noch lange über 3 Millionen bzw. über 4%.

Eine [Recherche zur Arbeitslosigkeit](#) (ma0176i.htm) beim Statistischen Bundesamt in Deutschland sagt, dass es 3,27 Millionen registrierte Arbeitslose im Jahr 2008 und 3,31 Millionen im Jahr 2009 gegeben hat. Die quadratische Trendaussage liegt in ungefähr dieser Höhe.

5.2.5 Streudiagramm von Wirtschaftswachstum und Arbeitslosenrate



Ein Streudiagramm zum Wirtschaftswachstum und der Zahl der Arbeitslosen macht nur ab der Wiedervereinigung einen Sinn. Es sagt, dass bei steigender Wirtschaftswachstumsrate die Arbeitslosenquote sinkt. Immerhin liegt sie aber bei einem Wirtschaftswachstum von 6% noch bei nahezu 3 %.

5.2.6 Interpretationen zur Entwicklung der Zahl der Arbeitslosen

Die funktionalen Analysen ergeben insgesamt eine bedrückende Vision: Die Zahl der Arbeitslosen wird wahrscheinlich auch in Zukunft weiter sehr hoch sein. Ein Berater des ehemaligen USA-Präsidenten Bill Clinton sagt: „[Politiker, die Arbeitsplätze versprechen, können genau so gut Regen versprechen](#)“ (ma0176.htm), andere Politiker sehen die Arbeitslosigkeit aber bereits überwunden, wenn die Arbeitslosenquote bei 3% liegt.

Arbeitslosigkeit hat eine zunehmende Verarmung und soziale Vereinzelung zur Folge (siehe hierzu auch Kapitel 2). Für viele Arbeitslose fehlt der Sinn des Lebens, der bei ihnen mit der Arbeit verbunden war.

Es gibt eigentlich keine Alternative: Die Zahl der Arbeitslosen kann zwar auch durch ein steigendes Wirtschaftswachstum abgeschwächt werden. Aber es stellen sich auch die folgenden Fragen. Müsste nicht die immer noch vorhandene Arbeit besser verteilt werden? Und müssten nicht neue solidarische Arbeitsmodelle politisch gewollt und demokratisch akzeptiert werden? Siehe hierzu die Seite [Arbeit ist genügend vorhanden: Bei neuen solidarischen Arbeitsmodellen - Daten und Fakten.](#) (ma0176.htm)

Verweise auf weitere Lösungen in MMM zur Anwendung u.a. der quadratischen Funktion:

- ▶ [bei einer Analyse der Geburten- und Sterberaten in Deutschland](#)
- ▶ [bei Analysen zur heutigen wirtschaftlichen Entwicklung in Deutschland sowie u.a in China und in Indien](#)
- ▶ bei Analysen zur Entwicklung von Armut und Reichtum in unserer Gesellschaft (siehe Kapitel 2 in dieser Schrift)
- ▶ [bei Analysen u.a. zum Einkommen in unterschiedlichen gesellschaftlichen Gruppen](#)
- ▶ bei Analysen der extremen Armut, des Hungers, der Unterernährung und deren Folgen (siehe Kapitel 2 in dieser Schrift)
- ▶ [bei Analysen des Ausstoßes von CO₂ und zur globalen Veränderung des Klimas](#)
- ▶ [bei Analysen zur Heftigkeit der Überfischung](#)
- ▶ [bei Analysen zum Fischverzehr sowie zur Entwicklung von Aquakulturen](#)

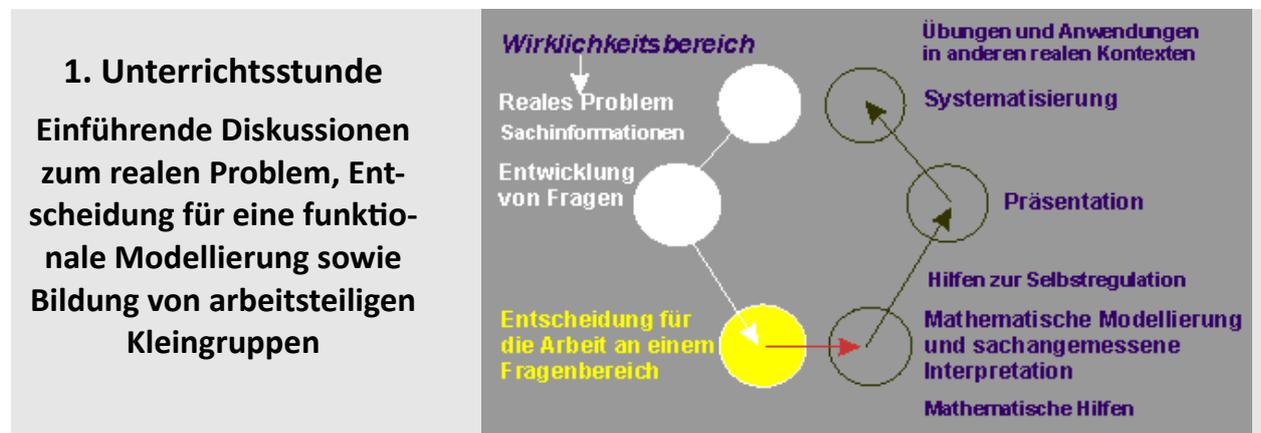
[Erörterung der Lösungsideen zur Anwendung quadratischer Funktionen](#)

[Test-Aufgaben zur kompetenzorientierten Diagnose](#)

5.3 Anwendung der Differentialrechnung im Kontext des realen Problems „Artensterben – erschöpfte Natur?“

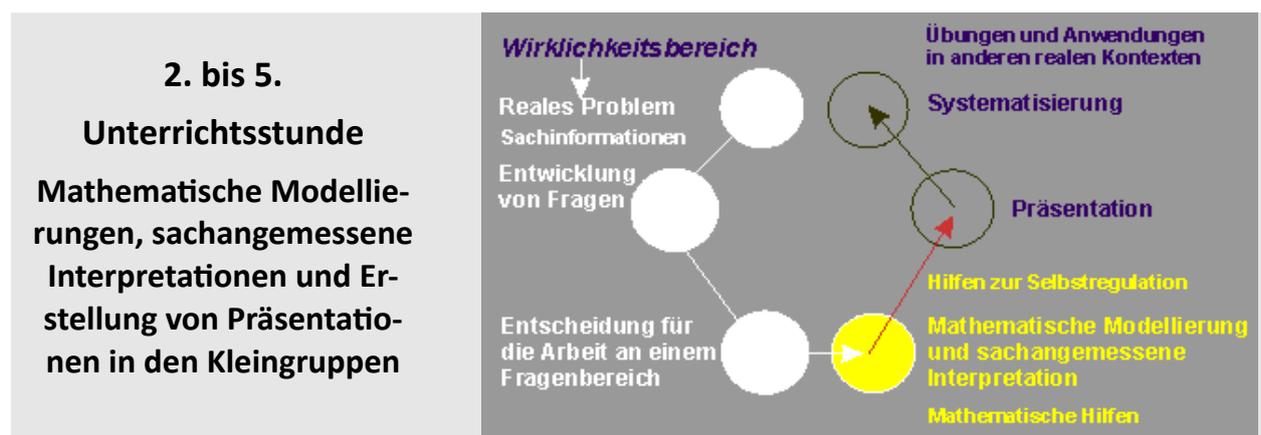
Nach einer gewissen Einführung in die Differentialrechnung in Klasse 10 oder 11 kann diese bereits in einer Anwendungsphase des Mathematikunterrichts z.B. bei Analysen zum realen Problem [„Artensterben - erschöpfte Natur?“](#) (ma0920.htm) genutzt werden.

5.3.1 Einbettung der funktionalen Modellierungsarbeiten in einen anwendungsorientierten Unterrichtsablauf (siehe Kapitel 4.2)



Die Mathematiklehrerin oder der Mathematiklehrer führt mit der Klasse ein Gespräch zum ökologisch bedeutungsvollen Problem des „Schwindens der Arten“ und lässt sich dabei unterstützen durch

- eine [mögliche Bild-Diskussion](#) (ma0920a.htm) oder durch
- eine Nachricht über den [Tod am Wegesrand](#) (ma0920a.htm#Vielfalt) oder durch
- [Blicke auf das Artensterben in heutiger Zeit und die Krisen der biologischen Evolution](#) (ma0922.htm).

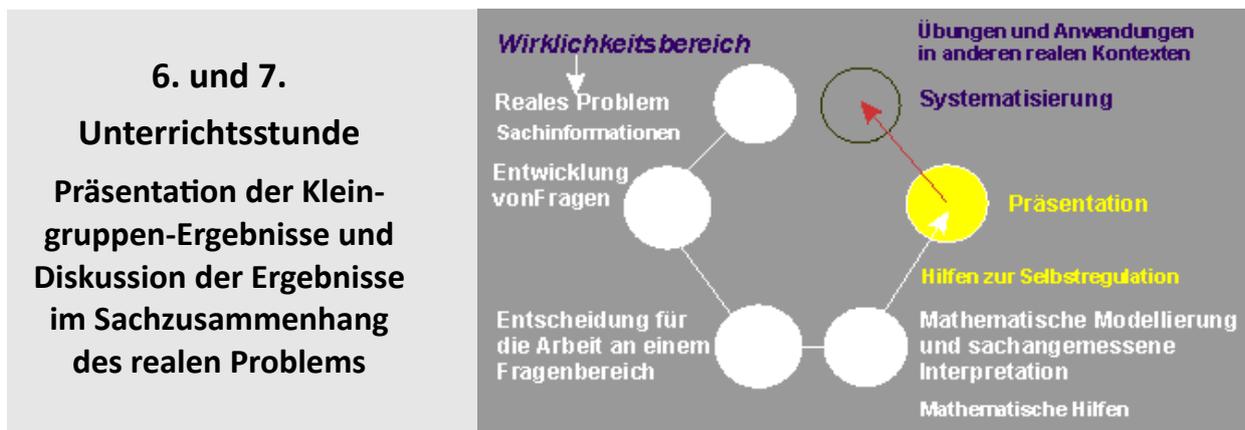


Die Mathematiklehrerin oder der Mathematiklehrer schlägt zwei **Arbeitsaufträge** zur funktionalen Modellierung in **arbeitsteiligen Kleingruppen** vor.

Kleingruppe(n) 1: Analysen zur „Heftigkeit“ des Artensterbens und des Schwindens der Biodiversität (ma0927.htm#Gruppe2)

Kleingruppe(n) 2: Weitere Analysen: Zum Beispiel zum Schwinden des Regenwaldes am Amazonas (ma0927.htm#Gruppe3)

Ggf. **Kleingruppe(n) 3: Simulation zum Schrumpfen der Regenwälder durch ökonomische Eingriffe in diese Ökosysteme - (ma0928.htm#Gruppe3)**



Anmerkung: Nur die Arbeit der Kleingruppe(n) 2 wird in der folgenden Darstellung beschrieben. Eine vollständige Lösung zu dieser funktionalen Modellierung mit Verlinkungen auf das reale Problem sowie auf die erwerbbaeren Kompetenzen und auf die interaktiven ExcelTabellen kann in MMM auf Seite ma1926.htm eingesehen werden.

5.3.2 Vom Datensatz zum Punkt-Diagramm

Das Schrumpfen des Regenwaldes am Amazonas ist bedrohlich. Der folgende Datensatz ist dem Artikel von Bernhard Epping in Bild der Wissenschaft 3/2009 entnommen. Weitere Datensätze zur selben Thematik sind vorgegeben auf der Seite: [Weltweit schrumpfen die Wälder!](http://Weltweit_schrumpfen_die_Wälder!) (ma0926a.htm)

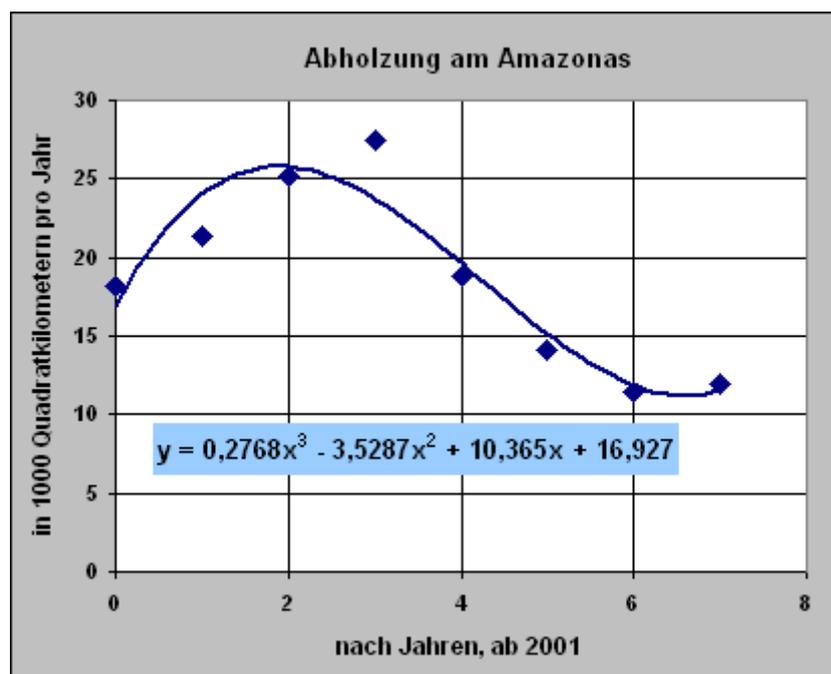
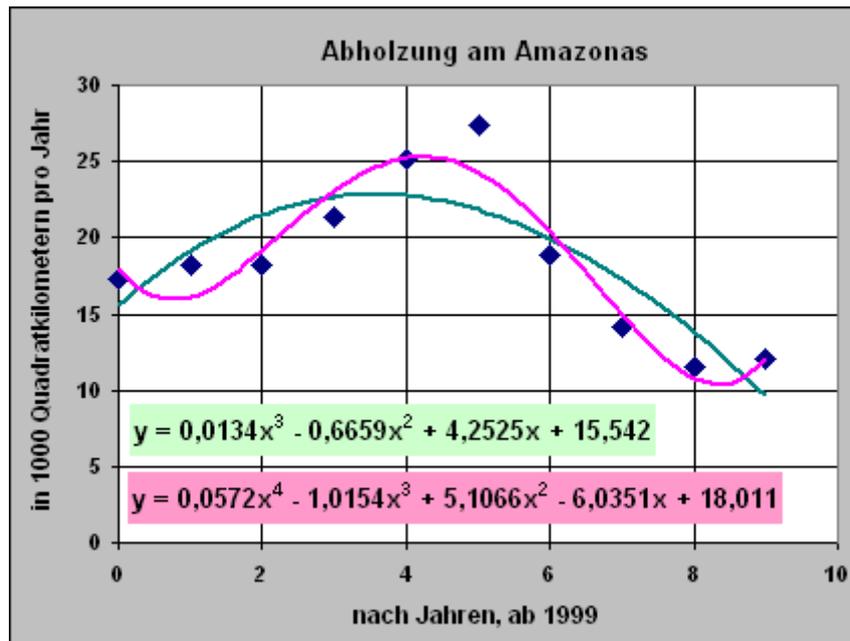
Jahr	jährliche Abholzung in 1000 Quadratkilometern	Jahr	jährliche Abholzung in 1000 Quadratkilometern
1999	17,3	2004	27,4
2000	18,2	2005	18,8
2001	18,2	2006	14,10
2002	21,4	2007	11,5
2003	25,2	2008	12,0

Das Schrumpfen der Wälder wird experimentell mit Hilfe des Werkzeugs Excel in einem Punkt-diagramm dargestellt.

5.3.3 Approximationen mit ganz rationalen Trendfunktionen

Das Punktdiagramm wird sodann mit ganz rationalen Funktionen approximiert:

- mit einer Funktion dritten und vierten Grades und
- mit einer Funktion dritten Grades nach Auslassen der Werte für die Jahre 1999 und 2000, um so den Verlauf in den letzten Jahren besser „in den Blick“ zu nehmen.





Die erste Approximation gibt den Verlauf des Schrumpfens der Wälder nicht gut wieder. Für weitere Untersuchungen und Rechnungen wird daher die letzte Approximation gewählt.

5.3.4 Beschreibungen zum Verlauf der Abholzung

Die letzte Approximation zeigt, wie das Schrumpfen der Wälder zunächst ansteigt, dann abfällt und wieder ansteigt.

Um die ermittelte Funktion differenzieren zu können, wird angenommen, dass die Funktion über der Menge der reellen Zahlen definiert ist. Für eine leichtere Handhabbarkeit werden die Koeffizienten auf eine Stelle hinter dem Komma gerundet.

$$f(x) = 0,3x^3 - 3,5x^2 + 10,4x + 17; x \in \mathbb{R}$$

Damit lassen sich dann auf dem üblichen Wege die Jahre berechnen, in denen die Abholzung maximal bzw. minimal war.

Aus $f'(x) = 0,9x^2 - 7x + 10,4 = 0$ berechnet man, dass ein **Maximum an der Stelle $x \approx 2$ (also im Jahr 2003) und ein Minimum an der Stelle $x \approx 6$ (also im Jahr 2007) vorliegt.**

Die Schwankungen in der Abholzung der Regenwälder lassen sich damit erklären, dass die weltweite Nachfrage nach Edelhölzern bzw. die Preise für Soja in eben dieser Weise schwanken. Soja wird auf den abgeholzten Flächen angebaut.

Die brasilianische Umweltbehörde kann mangels finanzieller Ressourcen kaum gegen international agierende Holzkonzerne und Soja-Exporteure angehen. Zum Beispiel legten Anfang 2007 die Preise für Soja und Palmöl wieder zu. Und in dieser Folge erhöhte sich 2007 auch die Abholzung der Regenwälder am Amazonas.

5.3.5 Tendaussagen zur Entwicklung der Abholzung

Der erneute Anstieg der Abholzung der Regenwälder im Jahr 2008 (im Jahr 7 nach 2001) lässt sich ebenfalls mittels der Ableitungsfunktion berechnen.

$$f(x)'(7) = 5,5$$

Für das Jahr 2008 kann man nach dieser Prognose mit einer Zunahme der Abholzung von 5500 Quadratkilometern rechnen. Würde man mit diesem Anstieg die Abholzungsfläche linear hochrechnen [$f(x) = 5,5x + 12$], würde sich die Abholzung also nicht erneut beschleunigen, so ergäbe sich im Jahr 2009 eine Fläche von rund 17500 Quadratkilometern und im Jahr 2010 eine Abholzungsfläche 23000 Quadratkilometern. Da der Amazonas-Regenwald eine Fläche von insgesamt 6,7 Millionen Quadratkilometern hat, wäre er bei dieser linearen Trendberechnung in etwa 47 Jahren - im Jahr 2055 - verschwunden!!!

Natürlich lassen sich die Trends der Abholzung - unter der Annahme weiterer Beschleunigungen - auch mit dem obigen Funktionsterm berechnen.

$$y = 0,2768x^3 - 3,5287x^2 + 10,365x + 16,927$$

Dann wäre der Regenwald bereits sehr viel früher etwa in etwa 25 Jahren verschwunden!!!

Die Trendberechnungen lassen sich auch noch mit den Daten zum [„Rainforest Verlust am Amazonas“](#) der brasilianischen Regierung (*mongabay.com*; 20. Mai 2005) ergänzen. Hierzu wird auf die Seite [ma1926.htm](#) in MMM verwiesen.

5.3.6 Interpretationen zur Entwicklung der Abholzung

Die Unsicherheiten in der Prognose sind zwar gewaltig je nachdem, welche Approximation gewählt wird. Es ist aber anzunehmen, dass die abgeholzte Fläche von Jahr zu Jahr größer werden wird, wenn nicht wirksame Gegenmaßnahmen ergriffen werden.

Daher zum Schluss noch eine **Zuspitzung in der Interpretation**: Wollen wir den Regenwald erhalten, so müssen wir Menschen weniger Fleisch essen. Denn erst dadurch würde die Nachfrage z.B. nach Soja als Futtermittel nachlassen. Genau daran sieht man aber, dass nicht alleine die Ökonomie, sondern auch das menschliche Verhalten eine große Rolle spielt. Eine Verhaltensänderung von „Verbrauchern“ wäre notwendig, um die ökonomischen Verhältnisse zu einer Änderung zu veranlassen.

Diese Erkenntnisse können in einer Diskussion in der Klasse verstärkt und ergänzt werden. Dann können sie als Stellungnahme wohl auch an die (örtliche) Presse weitergegeben werden.

Verweise auf weitere Lösungen in MMM u.a. zur Anwendung der Differentialrechnung:

- ▶ [bei Analysen u.a. zum Einkommen in unterschiedlichen gesellschaftlichen Gruppen](#)
- ▶ [bei Analysen u.a. zu Schichtungen in der Gesellschaft und zu möglichen Trendwenden in der Armut](#)
- ▶ [bei Analysen a\) zur Beschleunigung der Überfischung und zu Aquakulturen und b\) zu Korrelationen zwischen unterschiedlichen Entwicklungen](#)
- ▶ [Erörterung der Lösungsideen zur Anwendung der Differentialrechnung](#)
- ▶ [Test-Aufgaben zur kompetenzorientierten Diagnose](#)



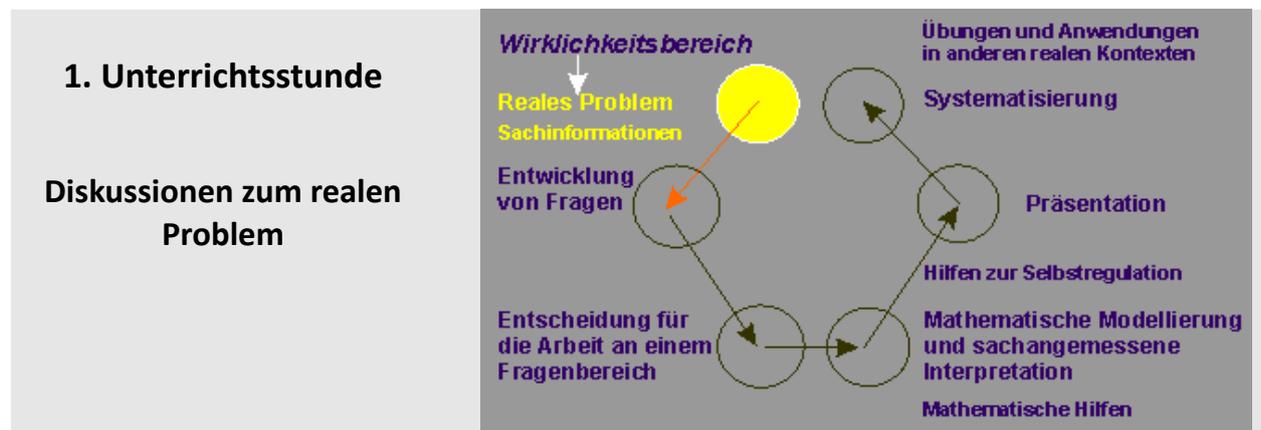
6. Projektorientierte Einführung in die Exponentialfunktion im Kontext des realen Problems: „Klimawandel auf der Erde?“



Bei projektorientierten Modellierungen am realen Problem [„Klimawandel auf der Erde?“](#) (ma0550.htm) können Exponentialfunktionen genutzt und auch eingeführt werden. Dies wird in den folgenden Ausarbeitungen hervorgehoben.

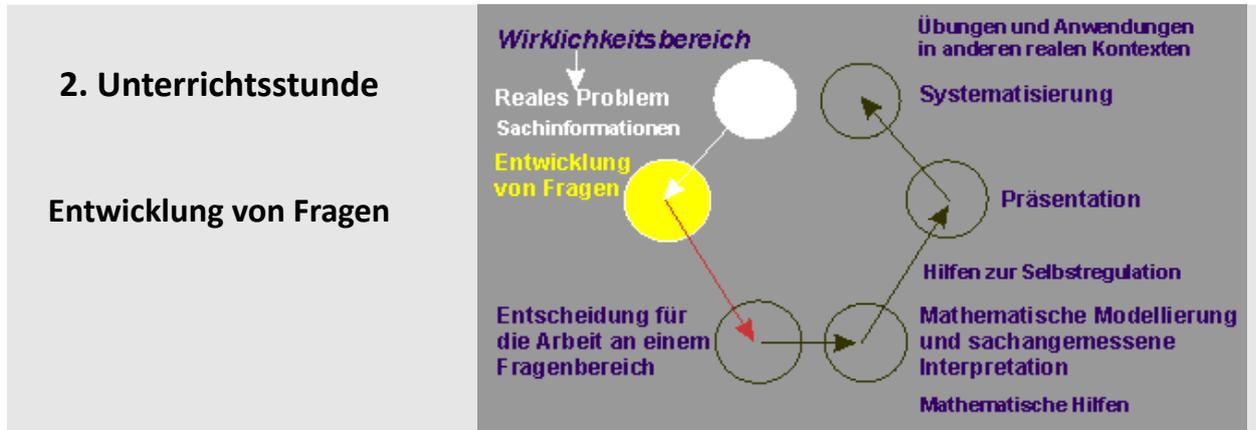
6.1 Einbettungen der funktionalen Modellierungsarbeiten in einen projektorientierten Unterrichtsablauf

Der idealtypische Ablauf eines projektorientierten Unterrichts ist mit didaktischen, methodischen und organisatorischen Hinweisen im **Kapitel 4.1** ausführlich dargestellt. Daher wird in diesem Kapitel nur in aller Kürze der Unterrichtsablauf skizziert.

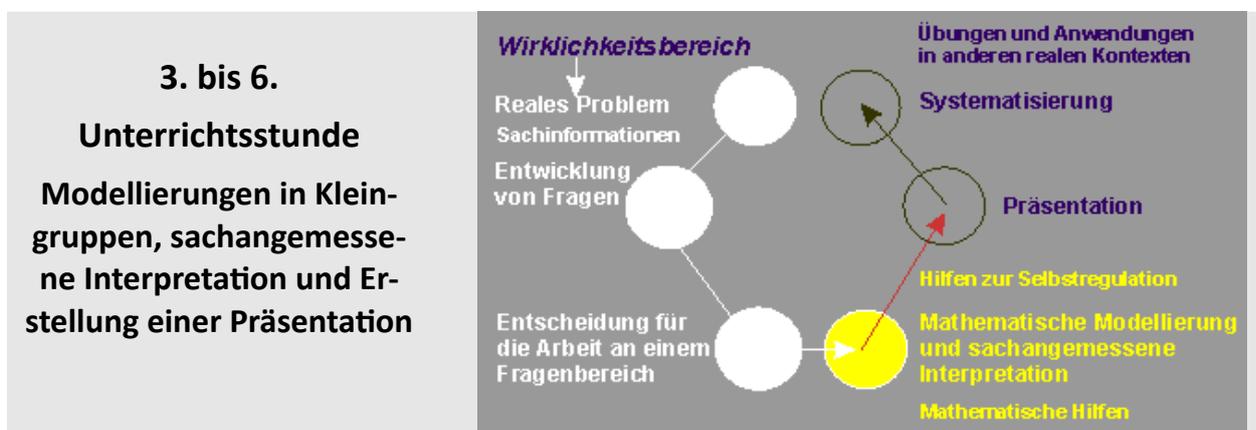
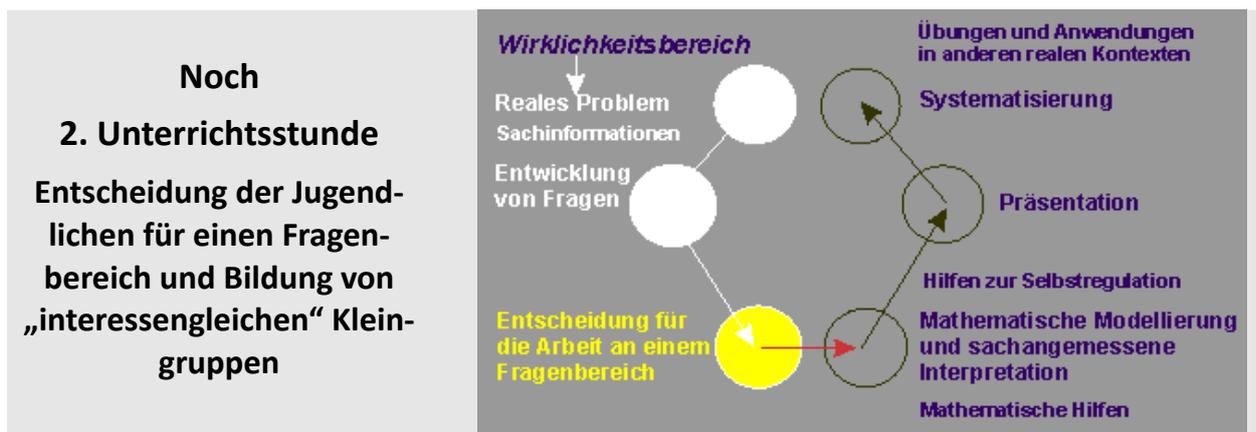


Die Mathematiklehrerin oder der Mathematiklehrer führt mit der Klasse ein Gespräch zum ökologisch und gesellschaftlich bedeutungsvolle Problem des „Klimawandels auf unserer Erde“ und lässt sich dabei unterstützen durch:

- eine [mögliche Bild-Diskussion](#) oder
- [einen übertriebenen Klimawitz](#) sowie durch
- [„Blicke“ auf das komplexe Klimaproblem](#)



Zur Entscheidungsfindung setzen die Kleingruppen die begonnene Diskussion fort und nutzen dabei auch die Ausführungen auf der Seite „[Selbstgemachter Klimawandel? Gibt es Auswege aus einer wahrscheinlichen Klimakatastrophe? ...?](http://ma0553.htm)“ (ma0553.htm)

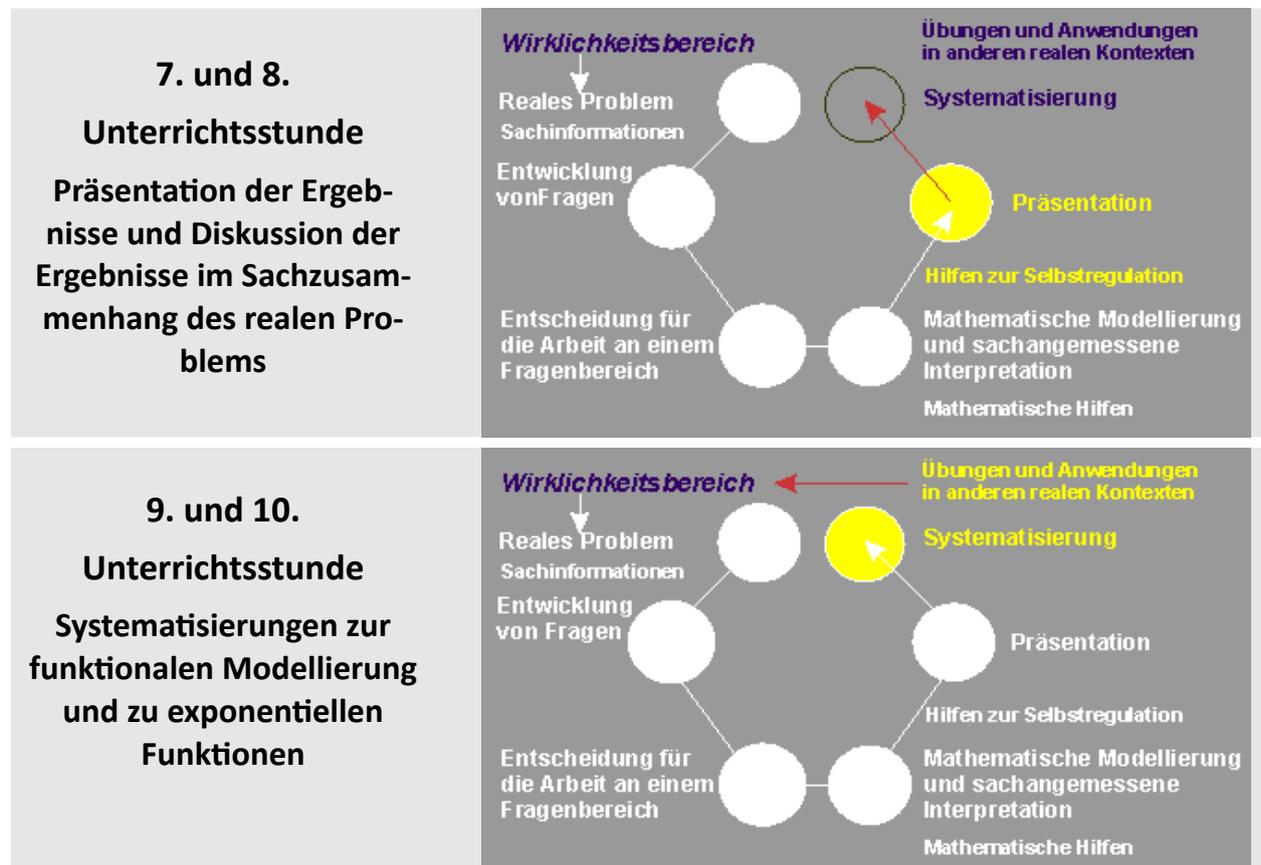


Die Jugendlichen entscheiden sich, was sie in den nächsten vier Mathematikstunden und auch

Zuhause arbeitsteilig in ihren Kleingruppen bearbeiten möchten: Etwa:

- **Kleingruppe(n) 1**: Analysen zur Energiegewinnung und zum „globalen“ Energieumsatz (ma0557.htm#Gruppe1)
- **Kleingruppe(n) 2**: Analysen zum Ausstoß von Kohlendioxid und zur globalen Veränderung des Klimas (ma0557.htm#Gruppe2)
- **Kleingruppe(n) 3**: Weitere Analysen zu Abhängigkeiten, Zusammenhängen und „Beschleunigungen“ in den Entwicklungen (ma0557.htm#Gruppe4)
- Ggf. **Kleingruppe(n) 4**: Konstruktion und Simulation eines einfachen Grundmodells zu dynamischen Wechselwirkungen zwischen Bevölkerung, Energieumsatz und Kohlendioxid (ma0558.htm#Gruppe1)

Anmerkung: Nur die Arbeit der Kleingruppe(n) 2 wird in der folgenden Darstellung beschrieben. Eine vollständige Lösung mit Verlinkungen auf das reale Problem sowie auf die erwerbba- ren Kompetenzen und auf die interaktiven ExcelTabellen kann in MMM auf Seite [ma1556.htm](#) eingesehen werden. Dynamische Modelle zu Wechselwirkungen zwischen Bevölkerung, Energie und Kohlendioxid sind auf der Seite [ma1558.htm](#) einsehbar. Zu dynamischen Model- lierungsmöglichkeiten im Kontext dieses realen Problems wird auch auf die ebenfalls herunter- ladbare Schrift „Denken in Netzen – systemischen denken“ Kapitel 5 und 7.7 verwiesen.



Ggf. kann sich hier eine Gegenüberstellung von funktionaler und dynamischer Modellierung anschließen.

6.2 Vom Datensatz zu Punkt-Diagrammen

Die folgenden Ausschnitte stammen aus einem umfassenden Datensatz zu „CO₂-Emissionen - weltweit“ von 1960 bis 2005. Der vollständige Datensatz und viele weitere Datensätze zur selben Thematik sind auf den folgenden Seiten zu finden:

- [Energiegewinnung aus fossilen Energieträgern](#) (ma0535.htm) und
- [Ausstoß und von Kohlendioxid](#) (ma0535a.htm).

Jahr	CO ₂ -Emissionen durch Verrennung fossiler Energieträger in Mt	CO ₂ -Emissionen durch Verrennung fossiler Energieträger inkl. Zementherstellung in Mt	CO ₂ -Konzentration in der Atmosphäre in ppm
1860	...	333 (2)	...
1900	...	1960 (2)	...
1920	...	3444 (2)	...
....
1980	...	19342 (2)	339 (2)
1985	...	19800 (2)	346 (2)
1990	21536 (1)	22383 (2)	354 (2)
1992	21611 (1)	22292 (2)	356 (2)
...
2000	23444 (3) / 23725 (1)	...	368 (4)
2001	23683 (3) / 24082 (1)	...	371 (5)

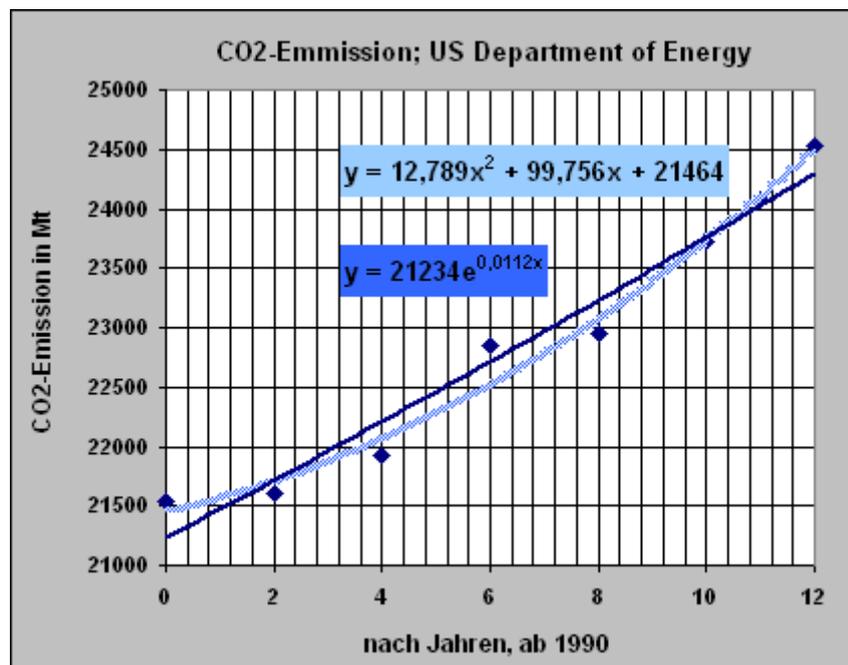
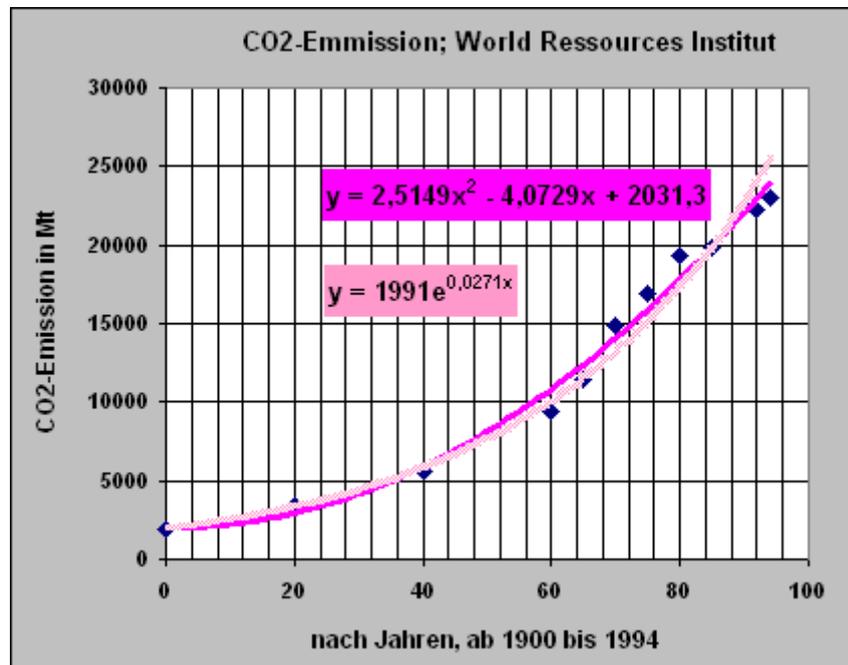
Quellen der Daten:

(1) United States Department of Energy; (2) World Resources Institute; (3) International Energy Agency; (4) Intergovernmental Panel on Climate Change; (5) National Weather Service.

Zunächst wird die weltweite Belastung der Luft mit Kohlendioxid betrachtet und in Punkt-Diagrammen dargestellt. (Diese Darstellungen siehe in der ExcelMappe auf Seite [1556.htm](#)).

Sodann wird der Verlauf der Punkt-Diagramme – wie nachfolgend dargestellt - u.a. mit quadratischen und exponentiellen Trendlinien approximiert.

6.3 Approximationen zu CO₂-Emission mit Trendfunktionen



6.4 Trendaussagen zu CO₂-Entwicklungen in der „nahen“ Zukunft

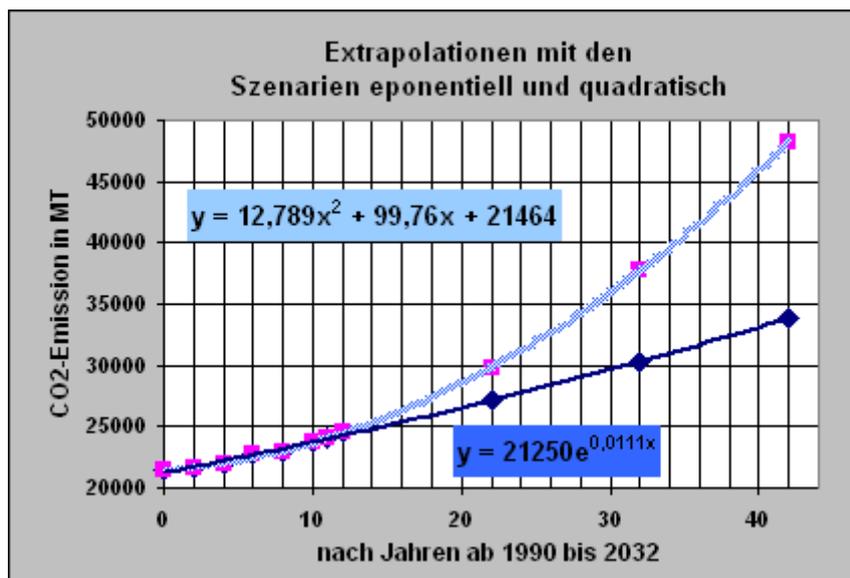
Für die folgenden Extrapolationen werden die Approximationen der Daten des US Department of Energy ab 1990 genutzt; denn diese Daten reichen bis zum Jahr 2002. Sowohl die quadratische als auch die exponentielle Approximation werden als mathematische Szenarien

für mögliche CO₂ Emissionen in den nächsten Jahrzehnten genutzt.

Extrapolationen von CO ₂ in Millionen Tonnen					
Jahr	nach Jahren	quadratisch	exponentiell	Differenz	arithmet. Mittel
2012	22	29849	27122	2727	28486
2022	32	37752	30313	7439	34033
2032	42	48214	33880	14334	41047

Die Differenz der quadratischen und exponentiellen Extrapolation nimmt zu. Sie wird als „Maß“ für eine zunehmende Unsicherheit der Prognose gedeutet.

Im folgenden Diagramm sind die Prognosen mittels der quadratischen und exponentiellen Extrapolation dargestellt.

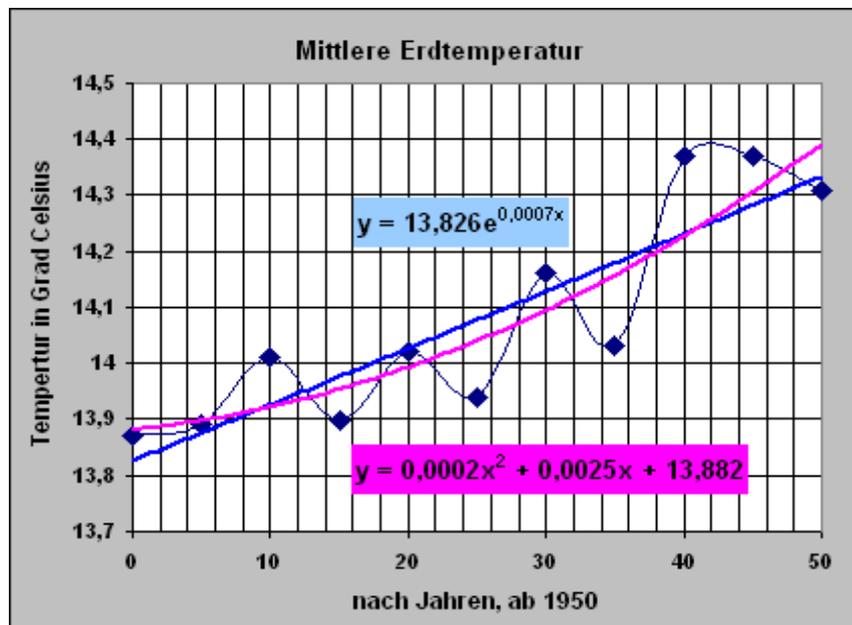


Verläuft die Entwicklung quadratisch, dann verdoppelt sich nahezu die Masse an CO₂ in den nächsten 30 Jahren ab dem 12ten Jahr nach 1990. Verläuft die Entwicklung dagegen exponentiell, so nimmt die Masse an CO₂ bis zum Jahr 2032 um nahezu 40% gegenüber dem Jahr 2002 zu. Prognosen dieser Art interessieren, weil angenommen wird, dass die mittlere Erdtemperatur vom CO₂ Gehalt der Atmosphäre abhängt.

6.5 Entwicklung, Approximation und Extrapolation der mittleren Erdtemperatur

Die Entwicklung der mittleren Erd-Temperatur in den letzten Jahrzehnten wird ebenfalls auf der Grundlage gegebener [Daten von 1950 bis 2000](#) (ma0555a.htm; Quelle: Worldwatch Insti-

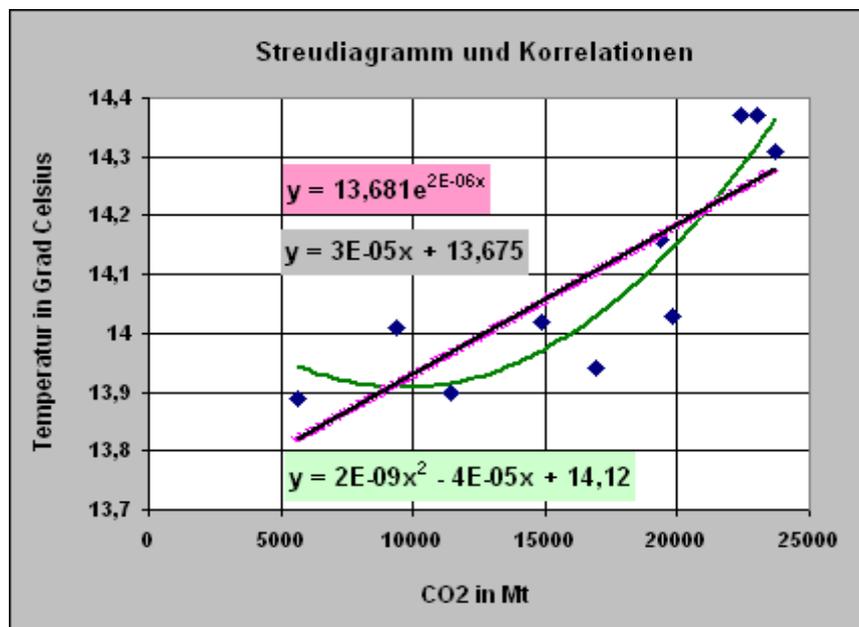
tut - Vital signs 2003) in einem Punkt-Linien-Diagramm dargestellt und der Verlauf wird wiederum mit einer exponentiellen und quadratischen Trendlinie approximiert.



Extrapolationen auf der Basis der beiden Trendfunktionen ergeben für die nächsten Jahrzehnte die folgenden Werte. Die exponentielle Extrapolation dürfte wahrscheinlicher als die quadratische sein. Denn die Klimakonferenzen werden wohl eine Wirkung zeigen.

Jahr	Nach Jahren ab 1950	quadr. Extrapolation	expon. Extrapolation
2030	80	15,362	14,617
2040	90	15,727	14,719
2050	100	16,132	14,821
2100	150	18,757	15,346

6.6 Streudiagramm zur CO₂-Emission und der mittleren Erdtemperatur



Aus der Tabelle zur Belastung der Atmosphäre mit Kohlendioxid und der Tabelle der mittleren Erd-Temperaturen wird eine neue Tabelle mit diesen beiden Größen immer passend zum gleichen Jahr erstellt. Sodann wird die CO₂-Emission in Abhängigkeit zur mittleren Erdtemperatur in einem Streudiagramm dargestellt und mit einer linearen, quadratischen und exponentiellen Regressionskurve approximiert. Die exponentielle Regressionskurve ist in dem betrachteten Intervall nahezu identisch mit der linearen.

Allen Modellierungen kann entnommen werden, dass die mittlere Erdtemperatur mit der Zunahme an CO₂ in der Atmosphäre steigt.

6.7 Interpretationen zu den Entwicklungen

Die vorstehenden funktionalen Analysen zum „Klima“ ergeben eine bedrückende Vision: Es ist damit zu rechnen, dass in jedem Fall die CO₂-Emissionen noch ansteigen werden. Denn z.B. China und Indien erheben in [Klimakonferenzen](#) (ma0556.htm) gegenüber den Industrieländern den Anspruch, ihre Pro-Kopf-Emission an Kohlendioxid angleichen zu dürfen.

Anmerkung: Die pro Kopf Emission ist zurzeit in den Industrieländern nahezu 4 bis 5mal so hoch wie in China oder Indien (mehr dazu auf der Seite [Ausstoß und von Kohlendioxid](#), ma0535a.htm).

An der Pro-Kopf-Belastung der Atmosphäre mit CO₂ ist ein Gerechtigkeitsproblem zu erkennen: Wer darf in Zukunft wie viel Klimagas in die Atmosphäre pumpen? Die Industrieländer haben die Erderwärmung verursacht. Deshalb wären sie auch als Erste in der Pflicht. Aber ökonomische Argumente werden dagegen gesetzt. Und der Lebensstandard in den alten Industrieländern könnte abnehmen.

Begrenzen lässt sich der weltweite CO₂-Anstieg aber nur dann noch, wenn auch die bisher Zukurzgekommenen bei ihrer ökonomischen Aufholjagd ökologische Leitplanken akzeptieren. Und das fällt sehr schwer, wie die Klimakonferenzen zeigen.

Auch Experten bestätigen unsere obigen Prognosen und sagen voraus, dass die mittlere Erdtemperatur in den nächsten 30 Jahren um 2 Grad Celsius ansteigen wird. Denn die kurze Geschichte der Industriegesellschaften lehrt, dass die Menschen erst dann aktiv werden, wenn die Katastrophe für alle Menschen am eigenen Leib spürbar wird (*siehe hierzu auch: [„Nichts als heiße Luft oder ‚german angst‘“ ma0556.htm#PlanB](#)*).

Ohne Einstellungsänderungen in den Bevölkerungen der „wichtigen“ Industrieländer wird es also ebenso wenig Verbesserungen am Klima geben wie bei einem ungebremsten Wachstum z.B. der „Entwicklungsländer“ China und Indien, das muss man vermuten!

Verweise auf weitere Lösungen in MMM zur Anwendung u.a. der Exponentialfunktion:

- ▶ [bei Analysen zur heutigen wirtschaftlichen Entwicklung in Deutschland sowie u.a in China und in Indien](#)
- ▶ [bei einer Analyse der Ausbreitung des HI Virus, der diagnostizierten AIDS-Fälle und der an AIDS gestorbenen Deutschen](#)
- ▶ [bei Analysen zur Heftigkeit der Überfischung](#)
- ▶ [bei Analysen zum Fischverzehr sowie zur Entwicklung von Aquakulturen](#)

[Erörterung der Lösungsideen zur Anwendung der Exponentialfunktion](#)

[Test-Aufgaben zur kompetenzorientierten Diagnose](#)



7. Skizzen für selbstreguliertes Forschen mit funktionaler und dynamischer Modellierung – Projektthema: Wachstum, Wachstum ... über alles!?



Vorbemerkungen:

Es wird vorausgesetzt, dass die Lernumgebung MMM bekannt ist und im Unterricht bereits mehrfach funktional, dynamisch und auch statistisch modelliert worden ist. Und somit einige Jugendlichen bereits in der Lage sind, auch „ohne Noten, Klavier zu spielen.“

Der Ablauf des Projektes entspricht dem Unterrichtsablauf, der in Kapitel 4.1 beschrieben worden ist. Er wird hier nicht beschrieben.

In dieser Schrift werden nur funktionale Modellierungen kurz angeregt. Die dazu passenden dynamischen Modellierungen zum selben Projektthema sind in der Schrift „Denken in Netzen – systemisch denken“ dargestellt. Sie sollten aber in diesem Projekt unbedingt auch vorkommen, damit das selbstorganisierte Forschen sowohl analysierende als auch konstruktiv-simulierende Überlegungen zum Thema umfasst und somit auch ihre wechselseitige Bedeutung zur Einsicht in Komplexitäten deutlich wird. Und immer spielen bei Wachstumsproblemen auch menschliche Einstellungen eine Rolle. Sie könnten durch eine Befragung (statistische Betrachtung) deutlich werden. Anforderungen dazu sind zu jedem realen Problem immer auf den Seiten mit der Nummer ma0xx9.htm zu finden.

7.1 Diskussion des Projektthemas und Entscheidung für interessenbezogene funktionale und dynamische Modellierungen an Teilproblemen

Die Jugendlichen setzen sich zunächst in Adhoc-Kleingruppen mit der Problematik des Wachstums auf der Grundlage der folgenden realen Probleme auseinander und entscheiden sich sodann für die Arbeit an einem der folgenden möglichen Wachstumsprobleme:

Beispiele für mögliche Wachstumsprobleme	Bezüge: u.a. Reales Problem / Anforderungsseiten
Weltbevölkerung und Welternährung –grenzenlos wachsend?	Bevölkerungsexplosion; oder? ma0158.htm und ma0157.htm
Arbeitsplatzangebot und Bruttosozialprodukt (BIP) – immer mehr und immer höher?	Arbeit für alle!?! ma0177.htm und ma0178.htm
Kapital, Konsum und Investition – immer noch gieriger? oder Volkseinkommen in Abhängigkeit von Konsum und Investition – immer noch höher!?	Wachstum, Wachstum - Boom ohne Grenzen? ma0227.htm und ma0228.htm
Ausreichende Ernährung durch nachhaltige Flächenentwicklung? Überlegungen am Beispiel der Subsahara-Zone	Wohlstand für alle! Vision oder Möglichkeit? ma0327.htm und ma0328.htm sowie Extreme Armut - „Hunger“ lebenslänglich? ma0337.htm und ma0338.htm
Energiebedarf der Menschheit immer noch wachsend! – Aber: humanverträgliche und klimafreundliche Energieumwandlung?	Energiehunger ...? ma0537.htm und ma0538.htm sowie Klimawandel auf der Erde? ma0557.htm und ma0558.htm
Selbstvergiftungen an Müll oder nachhaltiges Müllmanagement?	Auftürmende Müllberge: Ersticken wir im ... Müll? ma0947.htm und ma0948.htm

Haben sich die Jugendlichen auf der Grundlage ihrer Interessen für die Arbeit an einem Thema entschieden, organisieren sie sich in arbeitsteiligen Kleingruppen, in denen sie in der Schule und auch zu Hause **selbstreguliert** (d.h. selbstständig, selbstorganisiert und selbstverantwortet) mittels **funktionaler und dynamischer Modellierung** forschen und arbeiten wollen.

In der **Präsentationsphase**, die auf die Modellierungsphase folgt, tragen alle Kleingruppen ihre Ergebnisse so vor, dass sie bezogen auf das Projektthema diskutiert, interpretiert und bewertet werden können. Insbesondere sollte diskutiert und bewertet werden, ob es denn ein grenzenloses Wachstum geben kann oder ob wir Menschen [zum Wachstum verdammt](#) (ma0226.htm) sind.

Mögliche Lösungen zu den folgenden sechs Wachstumsproblemen können mit Verlinkungen auf das jeweilige reale Problem sowie auf die erwerbbaeren Kompetenzen und auf die interaktiven ExcelMappen in MMM nachgelesen werden. Sie werden hier nicht ausgeführt.

7.2 Weltbevölkerung und Welternährung – grenzenlos wachsend?

Einerseits wächst die Bevölkerung in den so genannten Entwicklungsländern „explosiv“. Andererseits nimmt in den „reichen“ Industrienationen die Bevölkerungszahl ständig ab. In diesem Kapitel fragen wir uns aber, ob es für eine wachsende Erdbevölkerung immerfort und überall eine hinreichende Ernährung geben kann?

Funktionale Modellierung	Dynamische Modellierung
Seite ma1156.htm	Seite ma1158.htm oder in der Schrift „Denken in Netzen“ im Kapitel 7

7.3 Arbeitsplatzangebot und Bruttosozialprodukt – Immer mehr und immer höher?

Nimmt in den Industriestaaten die (bezahlte) Erwerbsarbeit radikal ab? Kann es überhaupt eine neue Vollbeschäftigung für alle geben? Gibt es Arbeit für alle? Wenn ja, wie ist das möglich? Denn: Arbeit zu haben, trägt für die meisten Menschen zur Lebensqualität bei. Sie gibt vielen Menschen einen Sinn in ihrem Leben. Wer Arbeit hat, der fühlt sich besser!

Funktionale Modellierung	Dynamische Modellierung
Seite ma1176.htm	Seite ma1178.htm oder in der Schrift „Denken in Netzen“ im Kapitel 7



7.4 Kapital, Konsum und Investition – immer noch gieriger?

7.5 Volkseinkommen in Abhängigkeit von Konsum und Investition – immer noch höher!?

Es gibt kaum eine Nachrichtensendung, in der nicht von einem notwendigen Wachstum der Wirtschaft und des Industrie-Kapitals u.a. durch immer mehr Konsum gesprochen wird. Doch welcher „Glaube“ - oder ist es Wissen - nährt die Hoffnung, dass ein stetes, fortwährendes Wachstum überhaupt möglich ist?

<i>Funktionale Modellierung</i>	<i>Dynamische Modellierung</i>
Seite ma1226.htm	Seite ma1228.htm oder in der Schrift „Denken in Netzen“ im Kapitel 7

7.6 Ausreichende Ernährung durch nachhaltige Flächenentwicklung? Überlegungen am Beispiel der Subsahara-Zone

„Heute versuchen die **führenden Industrieländer** ihre technischen und gesellschaftlichen Strukturen neu zu gestalten und bemühen sich dabei, die ihnen innewohnenden Kräfte neu zu beleben und zu verjüngen, indem sie eine **neue Qualität wirtschaftlichen Wachstums** (Mehr unter Einsatz von Weniger!) suchen.

In den **Ländern der Dritten Welt** wird ein radikal anderer Weg verfolgt. Da ihre schwachen wirtschaftlichen Kräfte ... noch immer kaum zur Befriedigung der Grundbedürfnisse ihrer schnell wachsenden Bevölkerungen ausreichen, setzen diese Länder gezwungenermaßen ihre Anstrengungen für **quantitatives Wachstum** fort. **Auf diesem Weg wollen sie (z.B.) ... den Lebensstandard ihrer Bürger auf ein akzeptables Niveau heben und ihnen einen immer besseren Zugang zur Nahrung zu eröffnen,...**“ (Eduard Pestel, 1988). *(Hervorhebungen durch die Verfasser)*

<i>Funktionale Modellierung</i>	<i>Dynamische Modellierung</i>
Seite ma1336.htm	Seite ma1328.htm oder in der Schrift „Denken in Netzen“ im Kapitel 7

7.7 Energiebedarf der Menschheit immer noch wachsend! – Aber: humanverträgliche und klimafreundliche Energieumwandlung?

Grüne Pflanzen sind in der Lage, Kohlendioxid aus der Luft und aus den Gewässern zu assimilieren und ihn in Kohlenhydrate umzubauen. Lichtenergie und Chlorophyll sind dabei notwendige Bedingungen. Werden fossile Energieträger verbrannt, so entsteht bei ausreichendem Sauerstoff wieder Kohlendioxid. Der Kreislauf des Kohlendioxids ist geschlossen. Aber: Wird in Zeiträumen mehr Biomasse verbrannt, als durch Photosynthese in dieser Zeit entstanden ist, so gibt es in der Atmosphäre einen Überhang an ausgestoßenem Kohlendioxid, der auch für die Erhöhung der mittleren Erdtemperatur verantwortlich ist.

<i>Funktionale Modellierung</i>	<i>Dynamische Modellierung</i>
Seite ma1556.htm	Seite ma1559.htm oder in der Schrift „Denken in Netzen“ im Kapitel 7

7.8 Selbstvergiftungen an Müll oder nachhaltiges Müllmanagement?

Mit dem Wachsen der Bevölkerung nimmt naturgemäß die Müllmenge zu. Denn je mehr Menschen leben, desto mehr Abfall entsteht. Aus dem Müll, wohin er auch gerät (in die Ozeane, in Müllverbrennungsanlagen, in Recyclingwerken), entweichen Stoffe, die vergiftend auf Mensch und Tier wirken. Und in Tieren (etwa in Fischen im Meer) sammeln sich außerdem Schadstoffe an, die in die Nahrungskette des Menschen geraten und dann „giftig“ wirken.

<i>Funktionale Modellierung</i>	<i>Dynamische Modellierung</i>
Seite ma1946.htm	Seite ma1948.htm oder in der Schrift „Denken in Netzen“ im Kapitel 7

Der didaktische Bildungsserver Südtirols



© Pädagogisches Institut für die deutsche Sprachgruppe
Bozen 2010