Bildung **L**ernen **I**nformation **K**ommunikation **K**ooperation

Denken in Netzen - systemisch denken

Dynamische Modellierung realer Probleme - unterstützt durch die Lernumgebung „Modellieren mit Mathe“

Hans Kratz, Willi van Lück und Antonius Warmeling
unter Mitwirkung von Marta Herbst Spöttl

www.blikk.it

Diese Schrift ist ebenfalls eine

Didaktik der dynamischen Modellierung für den Mathematikunterricht in den Sekundarstufen 1 und 2

Sie wurde erstellt von

Hans Kratz, Willi van Lück und Antonius Warmeling

unter Mitwirkung von Marta Herbst Spöttl

Die Schrift ist auch als Download in der Lernumgebung „Modellieren mit Mathe“ verfügbar.

Inhalt

Vorwort und Einstimmung in die dynamische Modellierung

„Mathematische Grundbildung umfasst die Fähigkeit, die Rolle zu erkennen, die Mathematik in der Welt spielt, mathematisches Wissen funktional, flexibel und mit Einsicht zur Bearbeitung vielfältiger kontextbezogener Probleme einzusetzen und begründete Urteile abzugeben.“ (Bildungsstandards, KMK Deutschland; 2004).

Der Mathematikunterricht ist heute aber in der Regel noch an eine Vorstellung gefesselt, die fast ausschließlich den durchaus wichtigen, kulturellen Wert der „reinen Mathematik“ betont. Der Unterricht orientiert sich an der mathematischen Fachsystematik. Und daran ändern auch die in Schulbüchern hin und wieder eingestreuten Anwendungsaufgaben fast nichts. Denn sie spiegeln in der Regel nur eine konstruierte Realität wider, die mit der wirklichen wenig zu tun hat.

Der Mathematikunterricht muss sich, neben der notwendigen Systematik, auch mit dynamischer und funktionaler Modellierung von realen Problemen auseinander setzen. Dabei werden:

- schrittweise sowohl inhaltliche als auch allgemeine mathematische Kompetenzen vermittelt,
- durch handlungsorientierte Anwendungen und projektorientierte Einführungen sowie in fächerübergreifen Projekten zunehmend mehr die Interessen der Lernenden berücksichtigt und
- selbstreguliertes und selbstverantwortetes Lernen gefördert.

Dies wird in den folgenden zwei Schriften (pdf-Dokumenten) verdeutlicht:

- Denken in Netzen – systemisch Denken: Dynamische Modellierung realer Probleme
- Denken in funktionalen Zusammenhängen – Funktionale Modellierung realer Probleme

Die hier vorliegende Schrift gibt Anregungen zur dynamischen Modellierung. Dabei geht es darum, an überschaubaren dynamischen Systemen die innere Dynamik in Form von Einwirkungen, Rückkopplungen, Wechselwirkungen und dabei auftretenden Zeitverzögerungen experimentell und simulativ in den **Kapiteln 2, 5, 6** und **7** erfahrbar zu machen. Im Mathematikunterricht kann es dabei nicht darum gehen, hochkomplexe dynamische Systeme zu modellieren, denn damit haben auch ausgewiesene Experten ihre Schwierigkeiten. Allerdings liefert auch schon die Behandlung überschaubarer dynamischer Modelle im Mathematikunterricht wichtige Erkenntnisse für eine demokratische und mündige Mitwirkung in unseren Gesellschaften. Dabei werden Blicke über den Tellerrand der Mathematik hinaus notwendig, denn dynamische Modellierungen sind immer interdisziplinär. Mathematiklehrerinnen und Mathematiklehrer sind dann als kompetente Laien gefragt.

Mittels dynamischer und auch funktionaler Modellierung sollte der Mathematikunterricht für die immer komplexer und vernetzter werdende Lebenswirklichkeit eine wichtige Erkenntnishilfe von emanzipatorischer Bedeutung anbieten. Diese Herausforderung an Schule und Mathematikunterricht wird im **Kapitel 3** „Didaktik der dynamischen Modellierung“ ausführlich begründet und mit den Anforderungen in den Rahmenrichtlinien belegt. Es wird also auch gezeigt, welche inhaltlichen und allgemeinen Kompetenzen Schülerinnen und Schüler bei einer dynamischen Modellierung erwerben können.

Die Lernumgebungen „Modellieren mit Mathe“ (MMM) und auch „Mathe überall“ (MÜ) bieten für einen solchen Unterricht eine Fülle an Anregungen, mathematischen Hilfen und auch Unterrichtsvorschlägen. In **Kapitel 1** wird in aller Kürze die mächtige, hypermediale Lernumgebung MMM vorgestellt. Die Lernumgebung MÜ ist in derselben Weise strukturiert. Eine vertiefte Einarbeitung muss selbstreguliert vorgenommen werden. Dabei hilft hier wie auch im Mathematikunterricht eine „guided tour“.

Im **Kapitel 2** wird schrittweise in die Thematik der dynamischen Modellierung eingeführt. Am Beispiel von möglichen Lösungen zur „Konstruktion und Simulation des Wachstums von Spinnmilben und von Wechselwirkungen mit Raubmilben“ werden die grundlegenden Schritte und Begriffe der dynamischen Modellierung ausführlich beschrieben. Diese Beschreibung konzentriert sich auf den Prozess der dynamischen Modellierung und nicht auf unterrichtliche Schritte. Sie werden im **Kapitel 4** prototypisch skizziert.

Die dynamische Modellierung ist bis heute kaum im Mathematikunterricht anzutreffen, obwohl die Rahmenrichtlinien und Lehrpläne aller Länder die allgemeine Kompetenz des Modellierens verbindlich vorschreiben. Gerade heute in Zeiten des globalen Wandels, in der Modelle zu dynamischen Rückkopplungen und Wechselwirkungen zum Verständnis der Komplexität immer notwendiger werden, sollte die dynamische Modellierung im Mathematikunterricht zur Pflicht werden. Hier gibt es aber wahrscheinlich bei Mathematiklehrerinnen und Mathematiklehrern noch einen erheblichen Fortbildungsbedarf. Diese Schrift soll dabei helfen, dass Lehrkräfte dynamische Modellierungen und Simulationen selbstreguliert durchführen können, um so mittels eigener Erfahrung die Voraussetzungen für deren Vermittlung zu erwerben.

Marta Herbst-Spöttl, Hans Kratz,
Willi van Lück und Antonius Warmeling

1. Einführung in die Lernumgebung „Modellieren mit Mathe“

Die Lernumgebung „Modellieren mit Mathe“ (kurz: MMM) ist ein hochvernetzes, hierarchisch strukturiertes Informations- und Arbeitsmedium, das kostenlos im Internet erreichbar ist. Die Klapp-Bilder im Eingangsportal führen zu zehn Wirklichkeitsbereichen, in denen zurzeit insgesamt 33 reale Probleme aufbereitet sind. Ihre Behandlung im Mathematikunterricht erfordert für Lehrkräfte keine zusätzliche didaktische Aufbereitung. Das Bild in der Mitte führt zu mathematischen Hilfen, die in neun Bereichen fachsystematisch geordnet sind.

Die gelb unterlegten „Eingänge“ für Lehrkräfte führen u.a. zu einer „Guided Tour zur Nutzung der Lernumgebung im *‚herkömmlichen‘* Mathematikunterricht“, zum **Download dieser Schrift** sowie zu „Didaktische, methodische und lerntheoretische Anregungen **mit vielen Unterrichtsbeschreibungen**“. Alle „Elemente“ in diesen drei großen Hierarchien der Lernumgebung sind vielfach miteinander verlinkt.

Die oberste Sitemap beschreibt die Struktur und den Content diese Lernumgebung ausführlicher und macht auch mit ihrer Navigation vertraut. Werden in den folgenden Ausführungen Seiten aus der Lernumgebung zitiert, so werden diese Seiten in der Regel (mit vollständiger URL) direkt mit der Lernumgebung verlinkt.

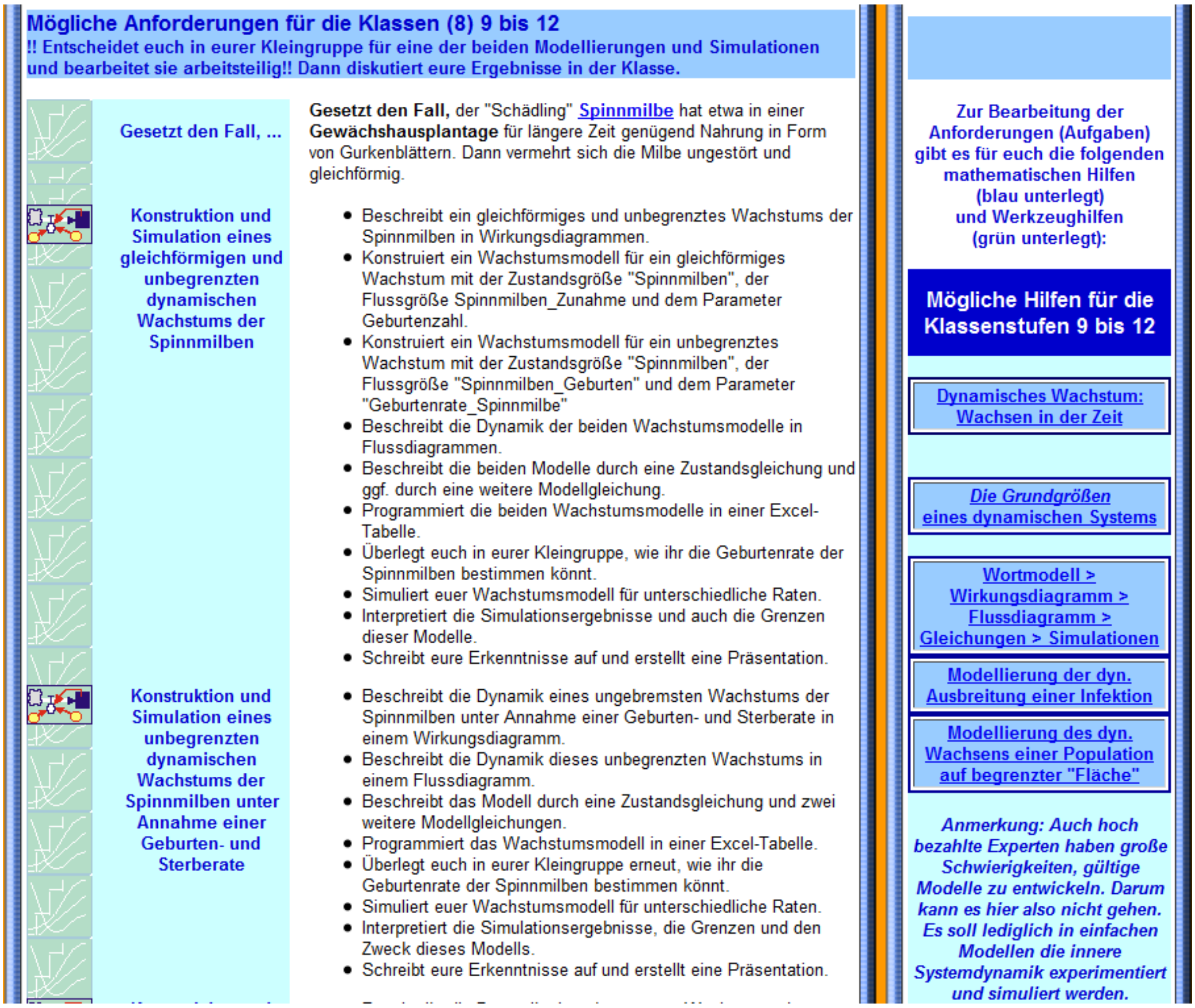
Am Beispiel eines realen Problems – alle realen Probleme sind in derselben Weise aufgebaut - soll die inhaltliche Struktur auch hier schon etwas verdeutlicht werden: Ein Klick im Eingangsportal auf den Wirklichkeitsbereich „**Ökologie und Landwirtschaft**“ öffnet eine (Verteiler-)Seite, auf der alle realen Probleme kurz beschrieben sind, die für diesen Wirklichkeitsbereich bisher aufbereitet wurden. Ein weiterer Klick auf „Ökologischer Landbau u.a umweltschonende Schädlingskämpfung“ öffnet sodann die folgende Eingangsseite, die hier auszugsweise dargestellt wird.

In der rechten Spalte dieser Eingangsseite werden Sachinformationen und Datenbestände zum Sachverhalt angeboten. In der mittleren Spalte werden mögliche Fragen zum realen Problem formuliert, denen Lernende nachgehen können. Und passend zu diesen Fragebereichen gibt es immer drei Modellierungsansätze, die mit einem Klick zu den Anforderungsseiten führen:

- Funktionale Analyse von Zusammenhängen – funktionale Modellierung,
- Konstruktion und Simulation dynamischer Modelle – dynamische Modellierung sowie
- Gestaltung und Auswertung einer Befragung – statistische Modellierung.

Ein Klick auf „Konstruiert und simuliert die Systemdynamik des Wachsens von Schädlingen sowie von Räuber und Beute bei der Schädlingsbekämpfung“ führt zu einer Seite, die hier ebenfalls nur in einem Ausschnitt gezeigt wird.

In der mittleren, weiß unterlegten Spalte dieser Seite werden Anforderungen an die Jugendlichen beschrieben. In der rechten Spalte werden ihnen mathematische Hilfen zur Lösung der Anforderungen angeboten.



Mögliche Anforderungen für die Klassen (8) 9 bis 12

!! Entscheidet euch in eurer Kleingruppe für eine der beiden Modellierungen und Simulationen und bearbeitet sie arbeitsteilig!! Dann diskutiert eure Ergebnisse in der Klasse.

Gesetzt den Fall, ...

Gesetzt den Fall, der "Schädling" Spinnmilbe hat etwa in einer **Gewächshausplantage** für längere Zeit genügend Nahrung in Form von Gurkenblättern. Dann vermehrt sich die Milbe ungestört und gleichförmig.

Konstruktion und Simulation eines gleichförmigen und unbegrenzten dynamischen Wachstums der Spinnmilben

- Beschreibt ein gleichförmiges und unbegrenztes Wachstums der Spinnmilben in Wirkungsdiagrammen.
- Konstruiert ein Wachstumsmodell für ein gleichförmiges Wachstum mit der Zustandsgröße "Spinnmilben", der Flussgröße Spinnmilben_Zunahme und dem Parameter Geburtenzahl.
- Konstruiert ein Wachstumsmodell für ein unbegrenztes Wachstum mit der Zustandsgröße "Spinnmilben", der Flussgröße "Spinnmilben_Geburten" und dem Parameter "Geburtenrate_Spinnmilbe"
- Beschreibt die Dynamik der beiden Wachstumsmodelle in Flussdiagrammen.
- Beschreibt die beiden Modelle durch eine Zustandsgleichung und ggf. durch eine weitere Modellgleichung.
- Programmiert die beiden Wachstumsmodelle in einer Excel-Tabelle.
- Überlegt euch in eurer Kleingruppe, wie ihr die Geburtenrate der Spinnmilben bestimmen könnt.
- Simuliert euer Wachstumsmodell für unterschiedliche Raten.
- Interpretiert die Simulationsergebnisse und auch die Grenzen dieser Modelle.
- Schreibt eure Erkenntnisse auf und erstellt eine Präsentation.

Konstruktion und Simulation eines unbegrenzten dynamischen Wachstums der Spinnmilben unter Annahme einer Geburten- und Sterberate

- Beschreibt die Dynamik eines ungebremsten Wachstums der Spinnmilben unter Annahme einer Geburten- und Sterberate in einem Wirkungsdiagramm.
- Beschreibt die Dynamik dieses unbegrenzten Wachstums in einem Flussdiagramm.
- Beschreibt das Modell durch eine Zustandsgleichung und zwei weitere Modellgleichungen.
- Programmiert das Wachstumsmodell in einer Excel-Tabelle.
- Überlegt euch in eurer Kleingruppe erneut, wie ihr die Geburtenrate der Spinnmilben bestimmen könnt.
- Simuliert euer Wachstumsmodell für unterschiedliche Raten.
- Interpretiert die Simulationsergebnisse, die Grenzen und den Zweck dieses Modells.
- Schreibt eure Erkenntnisse auf und erstellt eine Präsentation.

Zur Bearbeitung der Anforderungen (Aufgaben) gibt es für euch die folgenden mathematischen Hilfen (blau unterlegt) und Werkzeughilfen (grün unterlegt):

Mögliche Hilfen für die Klassenstufen 9 bis 12

Dynamisches Wachstum: Wachsen in der Zeit

***Die Grundgrößen* eines dynamischen Systems**

Wortmodell > Wirkungsdiagramm > Flussdiagramm > Gleichungen > Simulationen

Modellierung der dyn. Ausbreitung einer Infektion

Modellierung des dyn. Wachsens einer Population auf begrenzter "Fläche"

Anmerkung: Auch hoch bezahlte Experten haben große Schwierigkeiten, gültige Modelle zu entwickeln. Darum kann es hier also nicht gehen. Es soll lediglich in einfachen Modellen die innere Systemdynamik experimentiert und simuliert werden.

Eine von den Schülerinnen und Schülern ausgewählte und gewollte mathematische Hilfe etwa zu „Wortmodell > Wirkungsdiagramm > Flussdiagramm > Gleichungen > Simulationen“ führt zu einer Seite, von der hier ebenfalls nur ein Ausschnitt dargestellt wird.

Alle zu einem realen Problem aufbereiteten Seiten werden in einer zum realen Problem passenden sitemap (hier: ma0911.htm) zusammengefasst.

Wirkungsdiagramm für die Ausbreitung eines Gerüchtes: erster Teil

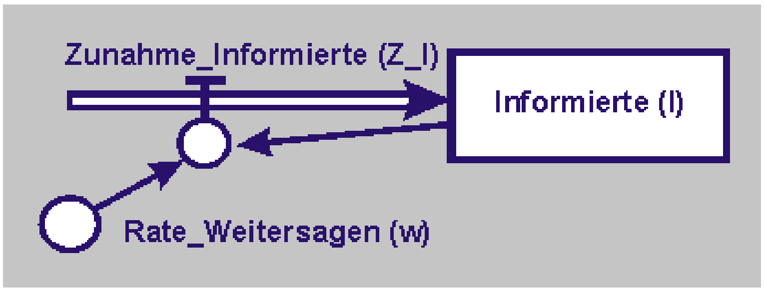
Die **Zahl der Informierten** nimmt dadurch zu, dass alle **bereits Informierten** die Nachricht **an w Personen weitersagen**. Je mehr Informierte es also gibt, desto mehr Jugendliche gibt es, die die Nachricht weitersagen.

Später in einer erweiterten Modellierung kann dann auch noch betrachtet werden, wie die Zahl derer, die die Nachricht nicht weitergeben, ansteigt und dann negativ auf die Gesamtzahl der Informierten wirkt und so die Weitergabe eines Gerüchtes bremst.

Analyse der Zustands- und Flussgröße sowie des Parameters

Die Zustandsgröße ist die **Zahl der Informierten (I)**. Die **Zunahme der Informierten (Z_I)** ist die Flussgröße. Sie hängt sowohl von der Zahl der Informierten ab als auch davon ab, an wie viel Jugendliche die Informierten durchschnittlich jeweils die Nachricht weitersagen. Diese Zahl ist der **Parameter (w);** das ist die **" Rate_Weiteragen"**.

Flussdiagramm für die Ausbreitung eines Gerüchtes - erster Teil



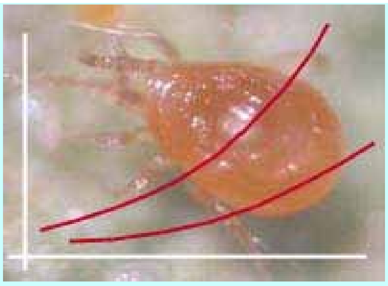
Alle mathematischen Hilfen werden unter fachsystematischen Gesichtspunkten gebündelt (hier: auf der Seite ma7400.htm).

Zu den neun mathematischen Bündelungs-Bereichen gelangt man von der Eingangsseite der Lernumgebung aus mit einem Klick auf das Bild in der Mitte.

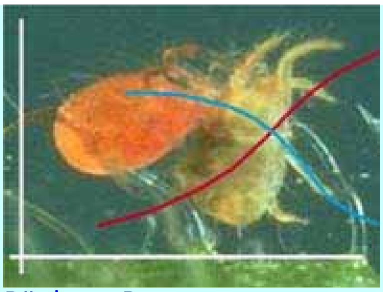
2. Grundlegende Schritte und Begriffe der dynamischen Modellierung dargestellt am Beispiel einer „umweltschonenden Schädlingsbekämpfung“

Im realen Problem ***„Ökologischer Landbau: u.a. umweltschonende Schädlings- und Unkrautbekämpfung“*** sind auf der Seite „Konstruiert und simuliert die Systemdynamik des Wachsens von Schädlingen sowie von Räuber und Beute bei der Schädlingsbekämpfung“(ma0918.htm) Anforderungen an die Jugendlichen zur dynamischen Modellierung formuliert.

Beutewachstum: Spinnmilbe



Räuberwachstum: Raubmilbe



Räuber - Beute **- Wachstum**

An den folgenden vier Beispielen zur dynamischen Modellierung wird in diesem Kapitel schrittweise in die Methode der systems dynamics oder in die Methode des vernetzten oder systemischen Denkens eingeführt. Sie steht in diesem Kapitel im Vordergrund und nicht die Beschreibung eines Unterrichtsablaufs.

Wohl sei hier darauf aufmerksam gemacht, dass die Modell-Konstruktionen unabhängig voneinander sind und daher in arbeitsteilig arbeitenden Kleingruppen konstruiert, simuliert und interpretiert werden können. Erst in der Präsentationsphase kommen die Ergebnisse zusammen und dann wird klar, wie die Modelle aufeinander aufbauen und sich ergänzen.

Verweise in die Lernumgebung:

Die Beschreibung einer projektorientierten Einführung in die dynamische Modellierung -passend zu diesem realen Problem - ist in MMM auf der Seite ma8597.htm zu finden.

*Eine **vollständige Lösung** mit Verlinkungen auf das reale Problem sowie auf die erwerbbaren Kompetenzen und auf die interaktiven ExcelMappen kann in MMM auf den Seiten ma1918.htm und ma1919.htm eingesehen werden.*

*Einige **Grundbegriffe zum dynamischen Wachstum,** eines Wachstums in der Zeit (wie Wachstumszahl, Geburtenzahl, Geburtenrate ...) sind in MMM auf der Seite ma2900.htm zu finden.*

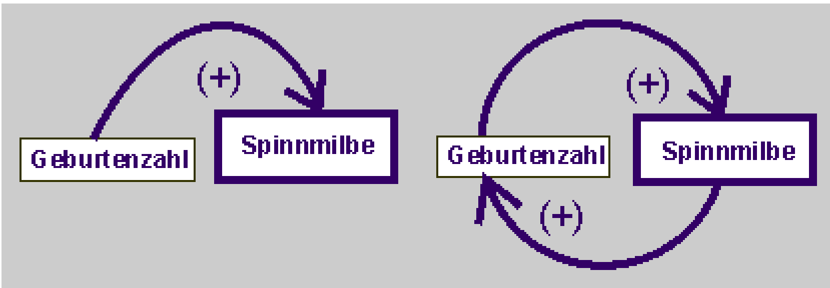
2.1 Konstruktion und Simulation dynamischer Modelle zum Wachstum von Spinnmilben mit rechnerisch und experimentell ermittelten Wachstumsgrößen

2.1.1 Gleichförmiges und unbegrenztes Wachstum der Spinnmilben in zwei einfachen Wirkungsdiagrammen

Wir nehmen an, dass die Spinnmilben in einer Gewächshausplantage genügend Nahrung in Form von Gurkenblättern haben. Dann nimmt die Spinnmilbenpopulation ständig und immer weiter zu, sehr zum Ärger des Plantagenbesitzers.

Der erste Schritt im Prozess der dynamischen Modellierung ist eine qualitative Beschreibung des Wachstums der Spinnmilben mit Worten und in einem Wirkungsdiagramm. Dabei ist zu fragen: Was wirkt auf Was ein und wie?

Das erste Wirkungsdiagramm zeigt, wie die Geburtenzahl der Spinnmilben positiv auf die Anzahl der Spinnmilben wirkt. Oder anders formuliert: Über die Geburtenzahl wächst die Spinnmilbenpopulation gleichförmig an.



Das zweite Wirkungsdiagramm zeigt, dass die zunehmende Anzahl der Spinnmilben auch positiv auf die Geburtenzahl zurückwirkt. Denn je mehr Spinnmilben leben, desto mehr Geburten wird es geben. Das Wachstum der Spinnmilben ist über die Geburtenzahl positiv rückgekoppelt.

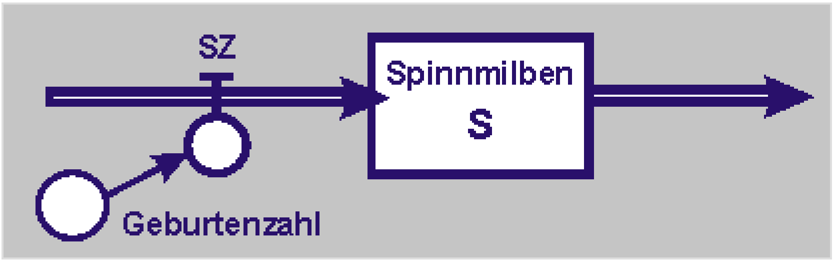
Beide Wirkungsdiagramme beschreiben in qualitativer Form ein gleichförmiges und unbegrenztes Wachstum der Spinnmilbenpopulation.

2.1.2 Dynamik eines gleichförmigen und unbegrenzten Wachstums der Spinnmilben in zwei Flussdiagrammen

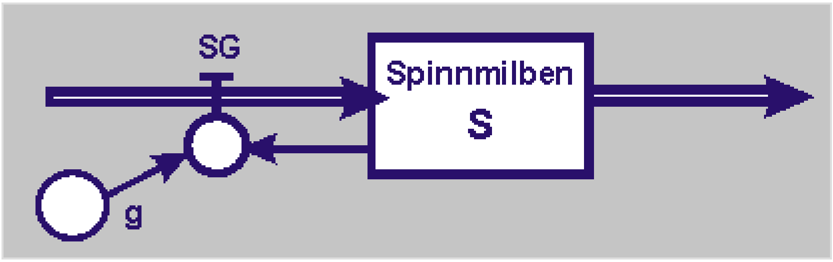
Bei der dynamischen, also zeitabhängigen Modellierung des Wachstums der „Spinnmilben“ werden die qualitativen Beschreibungen quantifiziert.

Fall A: Die Spinnmilbenpopulation **(S) nimmt täglich konstant zu**. Die Geburtenzahl z.B. von 50 Milben erzeugt eine tägliche Spinnmilben_Zunahme (**SZ**). Diese dynamische Zunahme lässt sich im folgenden Flussdiagramm darstellen.

Anmerkung: Eine Zusammenfassung der Begriffe und Symbole der systems dynamics siehe im Kapitel 3.3



Fall B: Das Wachstum der „Spinnmilben“ ist über die Geburtenzahl positiv rückgekoppelt. Die Spinnmilben-Geburten (**SG**) hängen von der **Geburtenrate (g)** sowie von der **Anzahl der bereits lebenden Spinnmilben (S)** ab. Diese dynamische Zunahme lässt sich im folgenden Flussdiagramm darstellen.



Beschreibung der beiden Modelle durch eine Zustands- und Modellgleichung

Fall A: Der Wachstumsprozess lässt sich unter Berücksichtigung eines Zeittaktes zwischen dem Zustand_neu und dem Zustand_alt in der folgenden Zustandsgleichung formulieren.

S_neu ← S_alt + Δt * SZ; Anfangsgröße für **S = 100**;

In Worten: *Der neue Zustand der Spinnmilben (**S_neu)** ergibt sich immer wieder aus dem alten Zustand der Spinnmilben(**S_alt)** plus **Zeittakt** t **Δt** mal Spinnmilben_Zunahme (**SZ**).*

Δt = 1 (Interpretation des Zeittaktes = 1Tag);

SZ = Geburtenzahl **= 50** (pro Tag)

Fall B: Die Zustandsgleichung ändert sich in Bezug auf die Spinnmilben_Zunahme. Sie wird zur Anzahl der Spinnmilben_Geburten (**SG**) und diese berechnet sich aus der Anzahl der bereits lebenden Spinnmilben (**S**) und der Geburtenrate (**g**).

S_neu ← S_alt + Δt * SG; Anfangsgröße für **S = 100**;

Δt = 1 (Interpretation des Zeittaktes = 1Tag);

SG = g * S; g = 0,29

(Anmerkung: Aus der Anfangsgröße S = 100 wird S_neu berechnet.

Im nächsten Zeittakt ist dann aber diese neu berechnete Größe die Größe S_alt.

Daher wird die Modellgleichung nur mit dem Symbol S formuliert.)

Programmierung der Zustands- und Modellgleichungen mit Excel

Die Zustands- und Modellgleichungen lassen sich jeweils in einer Excel-Tabelle programmieren. Von diesen Tabellen wird jeweils ein Ausschnitt gezeigt. Natürlich können in diesen beiden einfachen Fällen auch noch alle Werte selbstständig berechnet werden.

Exceltabelle für den Fall A

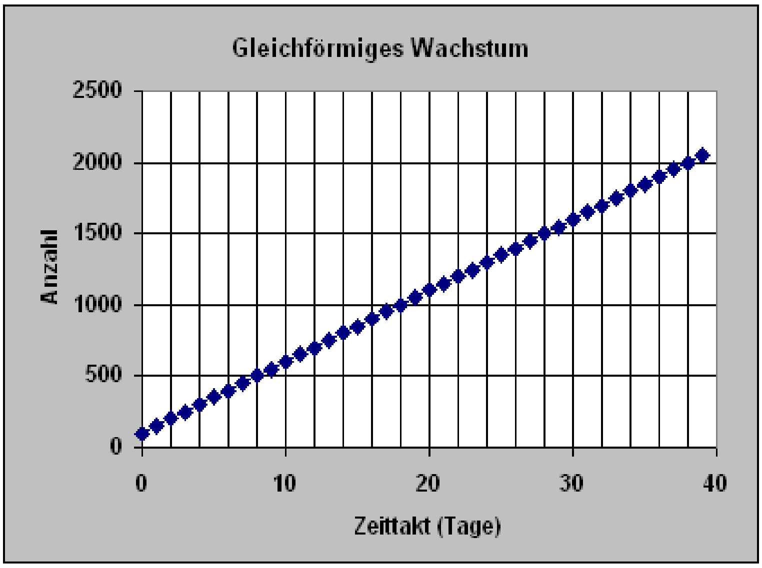
Zeittakt (in Tagen)	Δt	Spinnmilben_Zunahme (SZ)	Spinnmilben (S)
0	1	50	100
1	1	50	150
2	1	50	200
3	1	50	250

Exceltabelle für den Fall B:

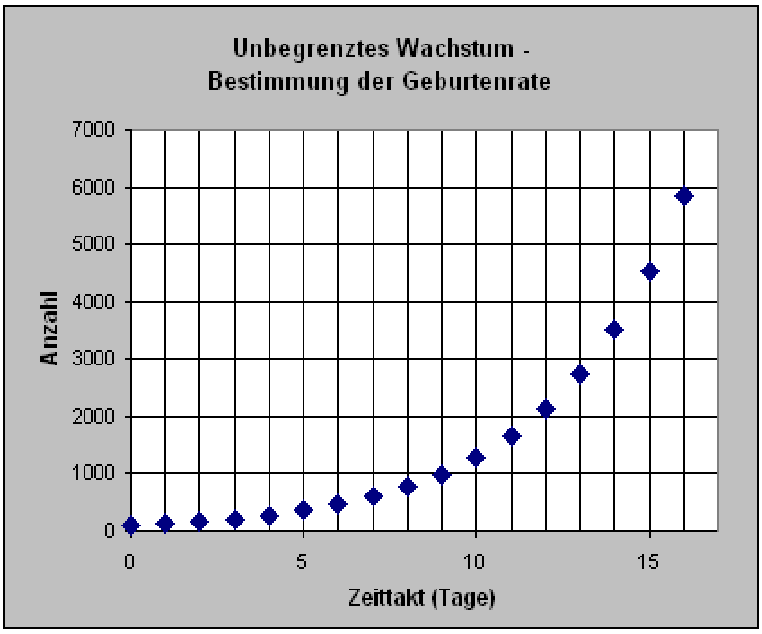
Zeittakt (in Tagen)	Δt	g	SG	S
0	1	0,29		100
1	1	0,29	29	129
2	1	0,29	37	166
3	1	0,29	48	214
4	1	0,29	62	276
5	1	0,29	80	356
6	1	0,29	103	459
7	1	0,29	133	592
8	1	0,29	172	764
9	1	0,29	222	986
10	1	0,29	286	1272
11	1	0,29	369	1641
12	1	0,29	476	2117
13	1	0,29	614	2731
14	1	0,29	792	3523
15	1	0,29	1022	4545

Simulation der Modelle

Fall A: Wir simulieren das erste Modell für unterschiedliche Anfangsgrößen S und für verschiedene konstante Spinnmilben_Zunahmen (SZ). Das folgende Diagramm entspricht der obigen Tabelle.



Fall B: Das zweite Modell simulieren wir ebenfalls für unterschiedliche Anfangsgrößen S aber auch für unterschiedliche Geburtenraten g. Das folgende Diagramm entspricht der obigen Tabelle.



Überlegungen zur Abschätzung der Geburtenrate der Spinnmilben

Hierzu ist in MMM auf Seite ma0914.htm die folgende Sachinformation zu finden:

„Von einer Spinnmilbenpopulation sind 75% weiblich. Eine erwachsene weibliche Spinnmilbe legt wöchentlich ca. 50 Eier von denen sich unter Gewächshausbedingungen durchschnittlich 80% nach 2 Wochen zu erwachsenen Insekten entwickeln, die durchschnittlich 2 Wochen leben."

Mit dieser Sachinformation ist folgende **lineare Abschätzung der Geburtenrate** möglich: Von 100 Spinnmilben sind 75 weiblich. Sie entwickeln in 14 Tagen (75*4/5*50 =) 3000 neue Milben. In der obigen Tabelle (gelb unterlegt) sind es 2731 Milben am 13ten und 3523 Milben am 14ten Tag. Wir erhalten also mittels einer **experimentellen Simulation**[1] bei einer Ausgangszahl von 100 Milben eine **Geburtenrate** von **g = 0,29**. Natürlich kann die Geburtenrate auch sehr viel größer sein, denn sie ist von der Temperatur im Gewächshaus abhängig.

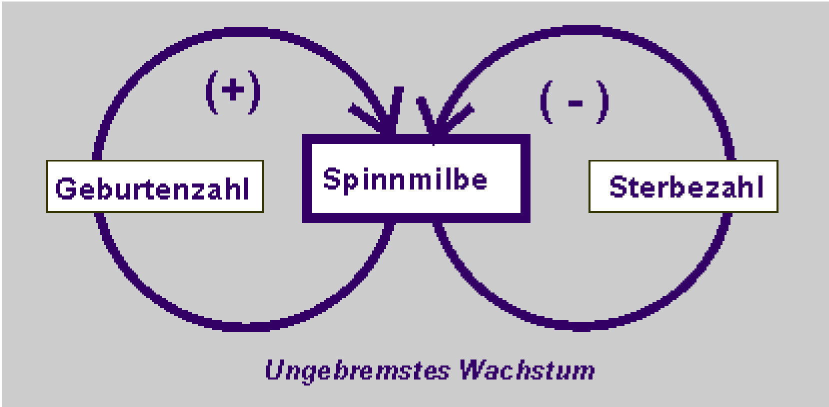
Interpretation und Grenzen dieser Modelle

Die Simulationsergebnisse zeigen, dass beide Modelle nicht realistisch sind. Einerseits wird es umso mehr Nachwuchs geben, je mehr Spinnmilben bereits leben. Die Entwicklung kann also nicht linear wie im Fall A verlaufen. Andererseits sterben auch ständig Spinnmilben. Also muss bei der Entwicklung auch eine Sterberate berücksichtigt werden.

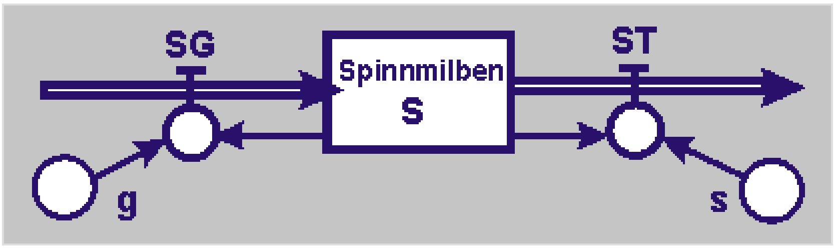
2.1.3 Dynamik eines ungebremsten Wachstums der Spinnmilben unter Annahme einer Geburten- und Sterberate

Im folgenden Wirkungsdiagramm wird jetzt zusätzlich angenommen, dass die Spinnmilben nicht ewig leben. Einerseits haben die nachwachsenden Generationen immer wieder eine positive Wirkung auf die Geburtenzahl (Spinnmilben_Geburten). Andererseits sterben aber auch Spinnmilben eines natürlichen Todes. Und diese Sterbezahl (Spinnmilben_Todesfälle) wirkt negativ (abnehmend) auf die Spinnmilben-Population; je mehr Spinnmilben es gibt, desto mehr werden auch sterben.

1 Werden aus 100 Spinnmilben innerhalb von 14 Tagen 3000 Spinnmilben, dann lässt sich der Wachstumsfaktor auch über eine „exponentielle" Rechnung mit 3000 = 100 * q ^14 <-> 30 = q ^14 <-> 14te Wurzel aus 30 berechnen. Das ist die Anwendung der so genannten Zinseszinsformel K(n) = K(0)*q ^ n für n Element der Menge der natürlichen Zahlen.Berechnungsansätze mittels Exponentialfunktionen oder allgemein mittels Potenzfunktionen setzen Stetigkeit voraus, die bei diskontinuierlichen, dynamischen Modellierungen nicht gegeben ist. Während man hier also den Wachstumsfaktor noch ausrechnen könnte, ist das also bei komplexeren Modellen praktisch nicht mehr möglich. Man ist dann auf experimentelle Bestimmungen oder auf Schätzungen angewiesen.



Bei der Übertragung des Wirkungsdiagramms in ein Flussdiagramm werden die Flussgrößen Spinnmilben_Geburten (SG) und Spinnmilben_Todesfälle (ST) sowie eine Geburtenrate (g) und eine Sterberate (s) zur Quantifizierung notwendig.



Beschreibung des Modells durch eine Zustands- und zwei Modellgleichungen

Die folgende Zustandsgleichung und die folgenden beiden Modellgleichungen für die Flussgrößen können unter Berücksichtigung eines Zeittaktes zwischen Zustand_neu und Zustand_alt aus dem Flussdiagramm heraus formuliert werden.

S_neu ← S_alt + Δt * (SG - ST); Anfangsgröße **S = 100**;

Δt = 1 (Interpretation des Zeittaktes = 1Tag)

SG = g * S; g = 0,29

ST = s * S; s = 0,14

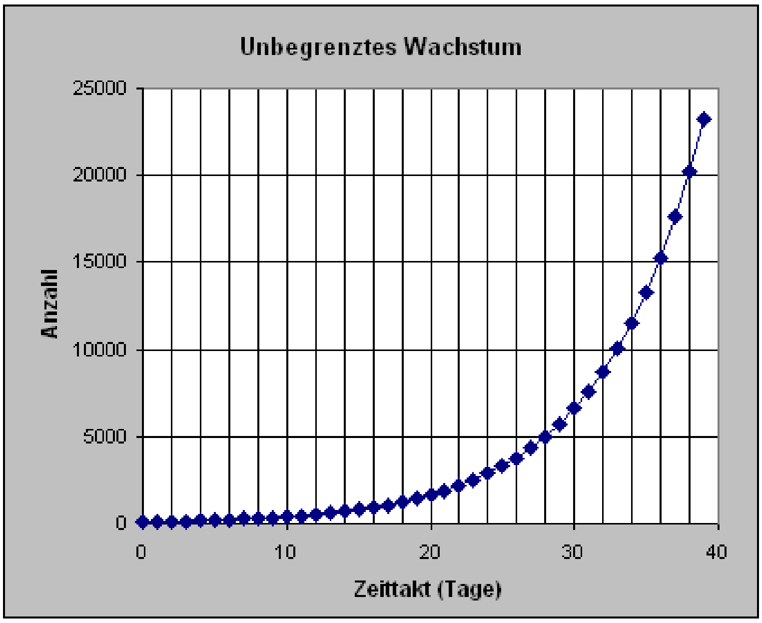
In der folgenden Simulation nehmen wir die Sterberate etwa halb so groß wie die Geburtenrate an und begründen diese Annahme damit, dass die Spinnmilben eine Lebensdauer von etwa 14 Tagen haben. Das ist das Zeitintervall, in dem aus 100 Milben etwa 3000 neue entstehen.

Programmierung der Zustands- und Modellgleichungen mit Excel

Die Zustandsgleichung und die beiden Modellgleichungen lassen sich in einer Excel-Tabelle programmieren. Zu diesem Zweck werden in den Spalten SG und ST sowie in S Formeln in Abhängigkeit von Δt, g und s sowie von der Anfangsgröße S eingegeben. Zwar können die Zahlen in der Tabelle immer noch schrittweise selbstständig nachgerechnet werden, aber der Rechenaufwand ist jetzt schon extrem hoch, wenn bei jeder Änderung der Modellgrößen alles neu gerechnet werden muss.

Zeittakt(Tage)	Δt	g	s	SG	ST	S
0	1	0,29	0,14			100
1	1	0,29	0,14	29	14	115
2	1	0,29	0,14	33	16	132
3	1	0,29	0,14	38	18	152
4	1	0,29	0,14	44	21	175
5	1	0,29	0,14	51	25	201
6	1	0,29	0,14	58	28	231
7	1	0,29	0,14	67	32	266
8	1	0,29	0,14	77	37	306

Simulation des Modells



Ergänzende Überlegungen zur Bestimmung der Geburtenrate und Wachstumsrate

Die Geburtenrate einer konkreten Population von Spinnmilben in einer Plantage muss „experimentell“ durch Abzählen in einer repräsentativen Stichprobe ermittelt werden. Denn „die **Entwicklung** verläuft über ein Ei- und 3 Jugendstadien bis zum adulten Tier und ist stark temperaturabhängig. Sie dauert bei 20°C ca. 17 Tage, bei 15 °C ca. 30 Tage. Das warme Gewächshausklima ist für die gemeine Spinnmilbe (Tetranychidae) ein idealer Lebensraum“ (siehe in

MMM die Informationen zum *„Wachstum der* [Spinnmilbe] *“ auf der Seite ma0914.htm).*

Fasst man die Geburtenrate und Sterberate zu einer Wachstumsrate (Wachstumsrate = Geburtenrate – Sterberate; w = 0,29 – 0,14) zusammen, dann vereinfacht sich das letzte Modell auf eine Rückkopplungsschleife, wie sie bereits oben im Fall B dargestellt worden ist.

Anmerkung: *In schulischen Erprobungen zeigt sich immer wieder, dass Mathematiklehrerinnen und -lehrer bei (ihren ersten) dynamischen Modellierungen die Zustandsgleichungen und die weiteren Modellgleichungen selbst erstellen wollen, um den mathematischen Hintergrund zu kennen. Darüber hinaus wollen sie dann das Modell auch programmieren. Dazu bietet sich z.B. Excel an. Für Anfänger im Umgang mit Excel gibt es in der Lernumgebung MMM Crash-Kurse (ma9050.htm) u.a. zum Anlegen einer Excel-Tabelle, zur Eingabe von Formeln, zur Rundung von Zahlen in den Spalten und zur Darstellung in Diagrammen.*

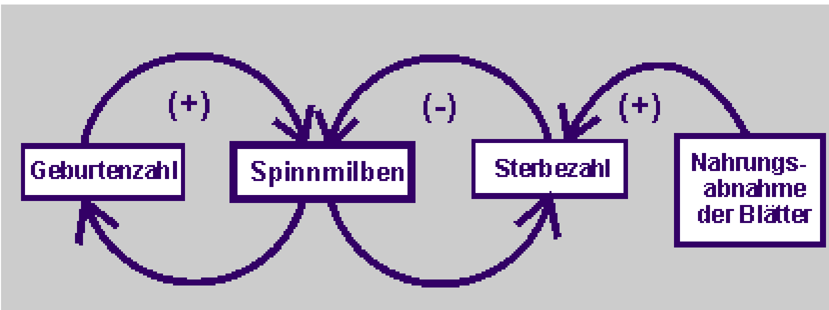
Verhaltensbeschreibung, Interpretation, Grenzen des Modells

Die Spinnmilbenpopulation wächst in diesem Modell zunächst langsam, dann schneller. In immer kürzeren Zeitabständen verdoppelt sich die Anzahl der Spinnmilben. Und das kommt der Realität schon näher. Denn der stetig ansteigende Nachwuchs zeugt ebenfalls Nachwuchs.

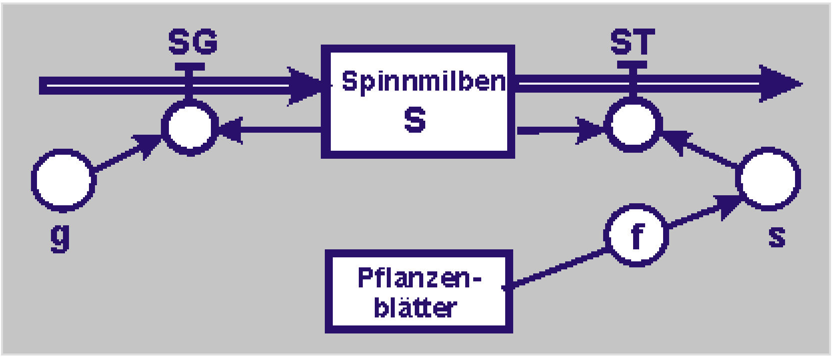
Jedoch, irgendwann werden die Spinnmilben alle Pflanzen kahl gefressen haben. Dann aber wird die Sterberate der Spinnmilben steigen und ihre Anzahl wird radikal abnehmen. Genau diese Überlegung zeigt uns die Grenzen des vorstehenden Modells auf. **Das Modell des „unbegrenzten Wachstums“ muss also überdacht und zu einem Modell des „begrenzten Wachstums“ erweitert werden.**

2.1.4 Beschreibungen zur Dynamik eines begrenzten Wachstums der Spinnmilben

Wir nehmen jetzt an, dass der Vorrat an Blättern, also die Nahrung der Spinnmilben, abnimmt. Dann wirkt diese zunehmende Nahrungsknappheit positiv (verstärkend) auf die Sterbezahl. Sie wird „stetig“ größer. Das folgende **Wirkungsdiagramm** beschreibt in qualitativer Form ein mögliches **begrenztes Wachstum der Spinnmilben**.



Die Dynamik lässt sich dann **u.a.** durch das folgende Flussdiagramm darstellen.



Beschreibung des Modells durch eine Zustands- und zwei Modellgleichungen

Gegenüber der vorhergehenden Modellierung ist hier die Geburtenrate und Sterberate gleichmäßig vergrößert, aber immer noch im Rahmen rechnerischer Abschätzungen gehalten, wenn von höheren Temperaturen im Gewächshaus ausgegangen wird.

S_neu ← S_alt + Δt * (SG - ST); Anfangsgröße **S = 100**;

Δt = 1 (Interpretation des Zeittaktes = 1Tag)

SG = g * S; g = 0,35

ST = s * S * f(t) s = 0,17

Die zunehmende Verknappung der Nahrung wird durch eine zeitabhängige Funktion f(t) modelliert. Im Fall A mittels einer **Treppenfunktion** und im Fall B mittels einer **linearen Funktion** oder im Fall C mittels einer quadratischen Funktion oder ... .

Fall A: f(t) = 1 für die ersten drei Zeittakte, **f(t) = 1,5** für die nächsten drei Zeittakte, **f(t) = 2** für die nächsten drei Zeittakte usw. ...

Fall B: f (t) = m * t, mit **m= 0,1**.

Anmerkung: *Die Pflanzen könnten auch als eine weitere Zustandsgröße definiert werden, die in Abhängigkeit vom Wachstum der Spinnmilben steht. Dann hätten wir ein ähnliches Modell, wie es später im Kapitel 2.2 beschrieben wird.*

Programmierung der Zustands- und Modellgleichungen mit Excel

Mit der Eingabe von Formeln in den Spalten SG, ST und S und der Eingabe der Tabellenfunktion f(t) ist der **Fall A** in der folgenden Excel-Tabelle programmiert. Die Zahlen in den Spalten SG und ST sind auf Null Stellen hinter dem Komma gerundet.

Zeittakt in Tagen	Δt	g	s	f(t)	SG	ST	S
0	1	0,35	0,17				100
1	1	0,35	0,17	1	35	17	118
2	1	0,35	0,17	1	41	20	139
3	1	0,35	0,17	1	49	24	164
4	1	0,35	0,17	1,5	57	42	179
5	1	0,35	0,17	1,5	63	46	196
6	1	0,35	0,17	1,5	69	50	215
7	1	0,35	0,17	2	75	73	217
8	1	0,35	0,17	2	76	74	219
9	1	0,35	0,17	2	77	74	222
10	1	0,35	0,17	2,5	78	94	206

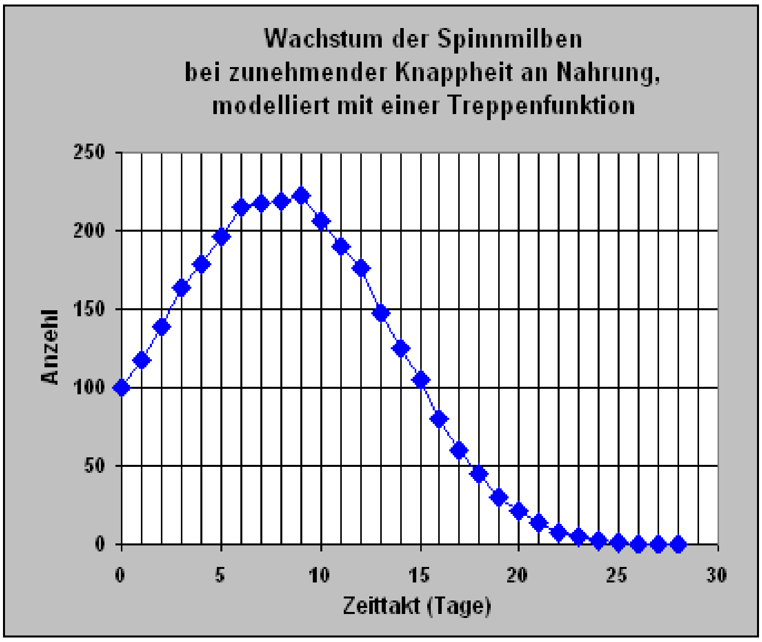
Mit der Eingabe von Formeln in den Spalten SG, ST und S und einer linearen Funktion **m*t** ist der **Fall B** in der folgenden Excel-Tabelle programmiert.

Zeittakt in Tagen	Δt	g	s	m	m*t	SG	ST	S
0	1	0,35	0,17	0,1				100
1	1	0,35	0,17	0,1	0,1	35	2	133
2	1	0,35	0,17	0,1	0,2	47	5	175
3	1	0,35	0,17	0,1	0,3	61	9	227
4	1	0,35	0,17	0,1	0,4	79	15	291
5	1	0,35	0,17	0,1	0,5	102	25	368
6	1	0,35	0,17	0,1	0,6	129	38	459
7	1	0,35	0,17	0,1	0,7	161	55	565
8	1	0,35	0,17	0,1	0,8	198	77	686
9	1	0,35	0,17	0,1	0,9	240	105	821
10	1	0,35	0,17	0,1	1	287	140	968

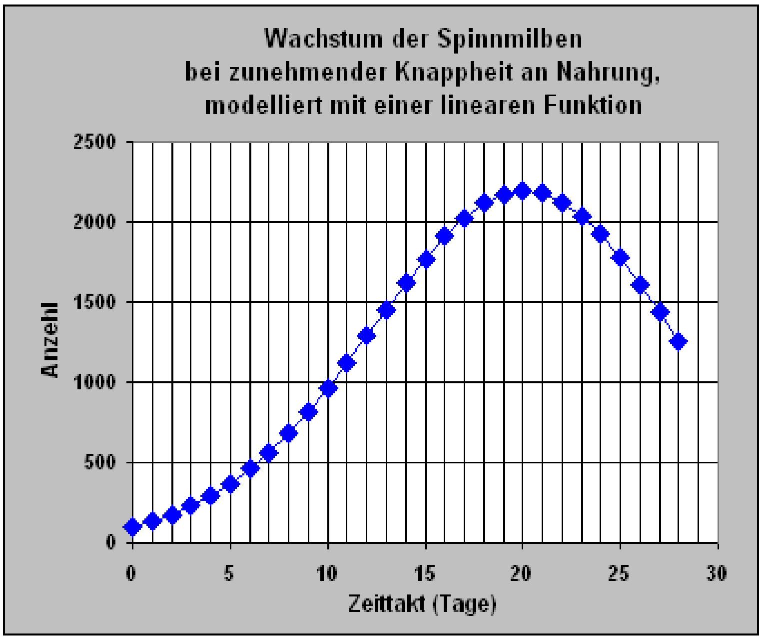
Simulationen des Modells

Für die gewählte Anfangsgröße, Geburtenrate und Sterberate sowie für die gewählten Zeitfunktionen ergeben sich die beiden folgenden Simulationsergebnisse.

Fall A



Fall B



Verhaltensbeschreibung, Interpretation und ein Zwischenresüme

Die Spinnmilbenpopulation wächst zunächst ständig schneller, solange genügend Nahrung vorhanden ist. Wird aber die Nahrungsmenge stetig knapper, steigt also die Nahrungsknappheit, so wächst die Population immer weniger. Sie erreicht schließlich ein Maximum und sinkt dann ggf. sehr schnell bis zum Aussterben ab.

Zwischenresüme:

*Während der Präsentationsphase im Unterricht kann an den zuvor beschriebenen drei Modelltypen diskutiert und erkannt werden, dass der **Zweck eines Modells** beachtet werden muss.*

Es ist zu fragen: Was soll mit dem Modell und seinen Simulationen bewirkt werden?

Geht es darum, im Gewächshaus sinnvoll handeln zu können oder geht es schlichtweg nur darum, eine allgemeine, qualitative Erkenntnis über die Dynamik von Wachstumsprozessen (u.a. bei Spinnmilben) zu erlangen? Von der Antwort hängt ab, welche Sorgfalt ggf. darauf gelegt werden muss, Anfangsgrößen und Wachstumsgrößen experimentell im Gewächshaus zu bestimmen. Dieser Gedanke wird in den Kapiteln 2.2.5 bis 2.2.7noch fortgesetzt und vertieft.

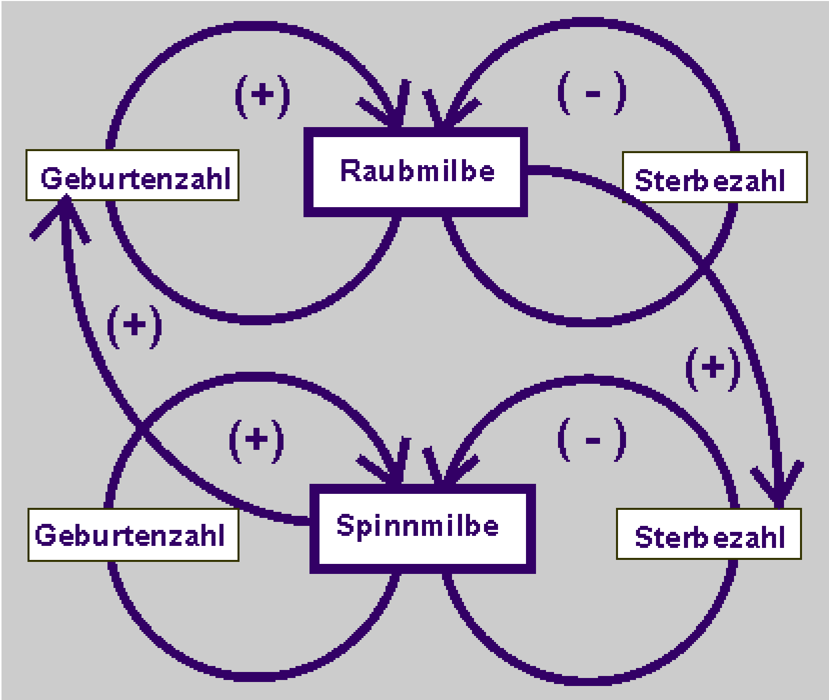
2.2 Konstruktion und Simulationen eines dynamischen Modells zu Wechselwirkungen zwischen Spinnmilben und Raubmilben

Eine vollständige Lösung mit Verlinkungen auf das reale Problem sowie auf die erwerbbaren Kompetenzen und auf die interaktiven ExcelMappen kann in MMM auf der Seite ma1919.htm eingesehen werden.

2.2.1 Beschreibung der Wechselwirkungen in einem möglichen Wortmodell und einem Wirkungsdiagramm

Zunächst das Wortmodell: In einer Gewächshaus-Gurken-Plantage haben sich Spinnmilben ungestört vermehrt. Werden Raubmilben ausgesetzt, so sind die Spinnmilben ihre Beute. Die Anzahl der Spinnmilben verringert sich und die Raubmilben können sich nun ihrerseits ungestört ausbreiten. Aber sie fressen ihre eigene Nahrung herunter, je mehr sie sich vermehren. Also kommt für die Raubmilben eine „Hungerzeit“. Dann werden sie in ihrer Zahl wieder abnehmen. Genau dies bedeutet dann aber für Spinnmilben, dass sie nun wieder an Zahl zunehmen können.

Was wirkt auf das Wachstum der Raubmilben und was auf das Wachstum der Spinnmilben? Wie wirkt es, positiv oder negativ? Und wie wirkt das Wachstum der Raubmilben und Spinnmilben aufeinander? Das sind Orientierungsfragen, die zur Beschreibung der Wechselwirkungen in dem folgenden Wirkungsdiagramm führen.



Das Wirkungsdiagramm zeigt zwei Diagramme zum ungebremsten Wachstum, eins für die Raubmilben und eins für die Spinnmilben. Aber diese beiden Diagramme sind miteinander gekoppelt. Die zunehmende Anzahl der Spinnmilben wirkt positiv auf die Geburtenzahl der Raubmilben. Je mehr Nahrung die Raubmilben vorfinden, desto stärker werden sie sich vermehren. Zeitverzögert werden also die Raubmilben zunehmen. Die nunmehr zunehmende Anzahl der Raubmilben wirkt positiv auf die Sterbezahl der Spinnmilben. Denn je mehr Raubmilben leben, desto mehr Spinnmilben werden gefressen oder desto größer wird die Sterbezahl der Spinnmilben sein.

Das Wachstum der Raubmilben und Spinnmilben steht also über die Geburtenzahl der Raubmilben und die Sterbezahl der Spinnmilben in Wechselwirkung. Diese Beschreibung ist qualitativer Natur. Es wird mit „je desto“ oder mit positiv und negativ argumentiert.

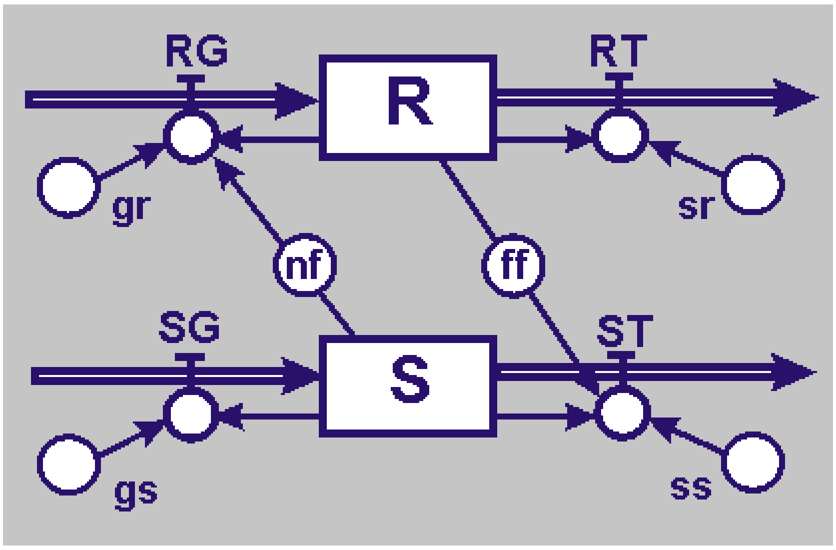
2.2.2 Dynamik des „Räuber-Beute-Modells“ von Spinnmilben und Raubmilben in einem möglichen Flussdiagramm

Das quantifizierte Wachstum der Spinnmilben S mit Geburten- und Sterberate ist im Kapitel 2.1.3 ausführlich beschrieben. Für die Raubmilben R kann es analog geschehen. Hinzu kommen nun aber die Wirkungen aufeinander:

Einerseits wirken die Spinnmilben über einen Nahrungsfaktor (nf) auf die Raubmilben_Geburten (RG). Der Faktor nf quantifiziert den Anteil der Spinnmilben, die jeweils Nahrung sind. Die Zahl wird abschätzend und/oder experimentell gewonnen.

Andererseits wirken die Raubmilben über einen Fressfakor (ff) auf die Spinnmilben_Todesfälle

(RT). Der Faktor ff quantifiziert den Anteil von Spinnmilben, der jeweils gefressen wird. Auch diese Zahl wird abschätzend und/oder experimentell gewonnen.



Im Flussdiagramm kommen also insgesamt die folgenden Größen vor:

Zustandsgrößen:

S Spinnmilbe; **R** Raubmilbe;

Flussgrößen:

SG Spinnmilbengeburt; **RG** Raubmilbengeburt;

ST Spinnmilbentod; **RT** Raubmilbentod

Parameter und Konstante:

gs = Geburtenrate Spinnmilben **gr** = Geburtenrate Raubmilben

ss = Sterberate Spinnmilben **sr** = Sterberate Raubmilben

nf = Nahrungs-Faktor **ff** = Fress-Faktor

Das Flussdiagramm bringt die Größen in einen quantifizierbaren Zusammenhang: Anfangsgrößen, Geburtenraten und Sterberaten sowie Nahrungs- und Fressfaktoren werden in mathematisierbare Wechselwirkungen gebracht. Wie die Geburten- und Sterberate der Spinnmilben bestimmt werden können, das ist im Kapitel 2.1.3 ausführlich behandelt worden. In derselben Weise können die Geburten- und Sterberate der Raubmilben bestimmt werden. Dazu gibt es in MMM unter „Wachstum der Raubmilben“ (ma0914.htm) Sachinformationen.

2.2.3 Beschreibung des Modells durch Zustands- und Modellgleichungen

In den folgenden zwei Zustands- und vier weiteren Modellgleichungen, die sich aus dem Flussdiagramm unter Berücksichtigung eines Zeittaktes zwischen Zustand_neu und Zustand_alt entwickeln lassen, wird das Modell noch einen weiteren Schritt quantifiziert, indem auch die Anfangsgrößen, Raten und Faktoren mit Zahlen belegt werden.

S_neu ← S_alt + Δt * (SG - ST); Anfangsgröße **S = 100**;

R_neu ← R_alt + Δt * (RG - RT); Anfangsgröße **R = 70**;

Δt = 0,5; (Interpretation des Zeittaktes = 1 Tag)

Zur Notwendigkeit und Bedeutung der Interpretation des Zeittaktes siehe:

Kapitel 3.3 (S.40) „Begriffe und Symbole der system dynamics - Exkurs in die Analysis“

SG = gs * S; gs = 0,35

ST = ss * S * R * ff; ss = 0,17; ff = 0,01

RG = gr * R * S * nf; gr = 0,22; nf = 0,005

RT = sr * R; sr = 0,11

Die Geburten- und Sterberate für die Spinnmilben werden aus Kapitel 2.1.4 übernommen, weil eine höhere Temperatur und Luftfeuchtigkeit in der Plantage angenommen wird. Aber auch die Übernahme der Werte aus Kapitel 2.1.3 wäre möglich. Und: Auch bei den Raubmilben wird die Sterberate als halb so groß wie die Geburtenrate angenommen.

2.2.4 Programmierung der Zustands- und Modellgleichungen mit Excel

Nun lässt sich das Modell in einer Excel-Tabelle programmieren, von der hier aber nur ein Ausschnitt gezeigt wird. Zwar könnten die Zahlenwerte noch immer schrittweise ausgerechnet werden, aber der Rechenaufwand wird jetzt sehr hoch. Excel wird somit für die Berechnung der Zustands- und Modellwerte eine fast notwendige Hilfe.

In den Rechnungen sind die Werte für SG, ST, RG und RT auf zwei und die Werte für S und R auf eine Stelle hinter dem Komma gerundet.

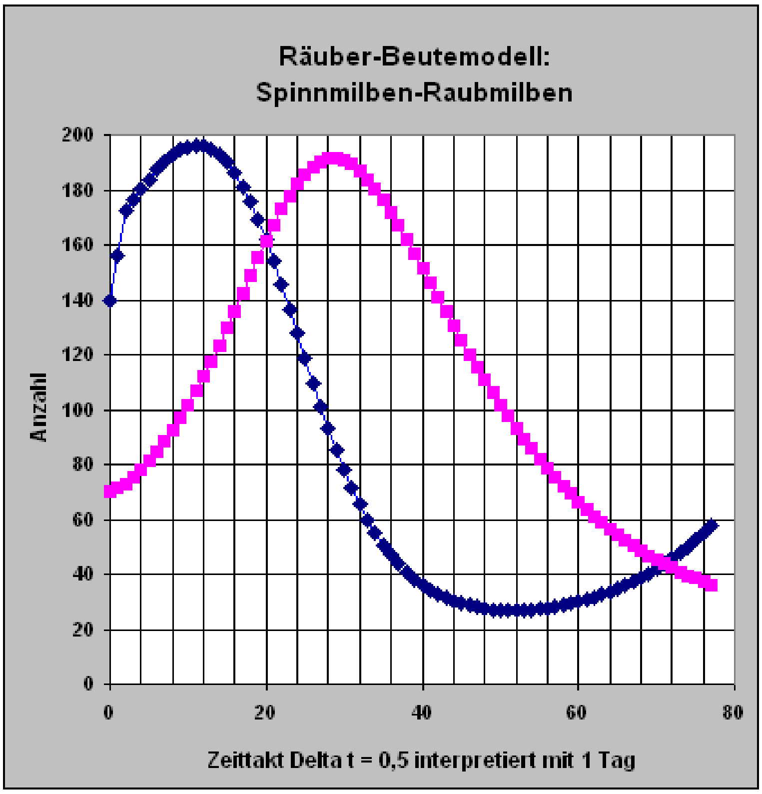
Zeit 1Tag	Zeit-takt	Δt	gs	ss	gr	sr	nf	ff	SG	ST	RG	RT	S	R
0	**0**	**0,5**	**0,35**	**0,17**	**0,22**	**0,11**	**0,005**	**0,01**					**140**	**70**
1	**0,5**	0,5	0,35	0,17	0,22	0,11	0,005	0,01	49	16,66	10,78	7,7	**156,2**	**71,5**
2	**1**	0,5	0,35	0,17	0,22	0,11	0,005	0,01	26,55	18,99	12,29	7,87	**172,4**	**73**
3	**1,5**	0,5	0,35	0,17	0,22	0,11	0,005	0,01	29,31	21,39	13,84	8,03	**176,2**	**75,2**
4	**2**	0,5	0,35	0,17	0,22	0,11	0,005	0,01	29,95	22,53	14,58	8,27	**180,2**	**78,1**
5	**2,5**	0,5	0,35	0,17	0,22	0,11	0,005	0,01	30,63	23,93	15,48	8,59	**183,9**	**81,3**
6	**3**	0,5	0,35	0,17	0,22	0,11	0,005	0,01	31,26	25,42	16,45	8,94	**187,3**	**84,7**
7	**3,5**	0,5	0,35	0,17	0,22	0,11	0,005	0,01	31,84	26,97	17,45	9,32	**190,2**	**88,5**
8	**4**	0,5	0,35	0,17	0,22	0,11	0,005	0,01	32,33	28,62	18,52	9,74	**192,6**	**92,6**
9	**4,5**	0,5	0,35	0,17	0,22	0,11	0,005	0,01	32,74	30,32	19,62	10,19	**194,5**	**97**
10	**5**	0,5	0,35	0,17	0,22	0,11	0,005	0,01	33,07	32,07	20,75	10,67	**195,7**	**101,7**

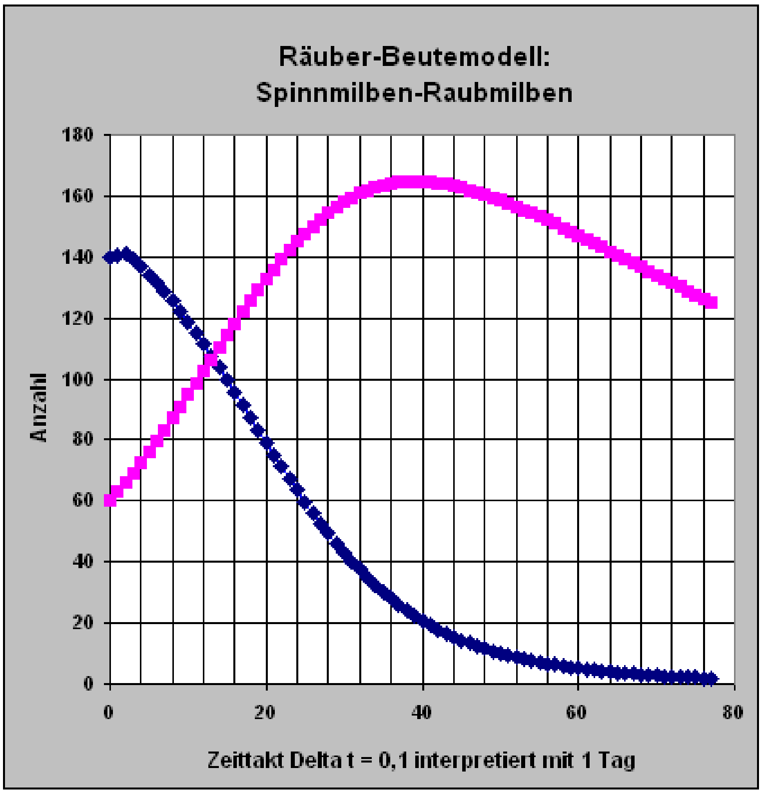
Simulationen des Modells

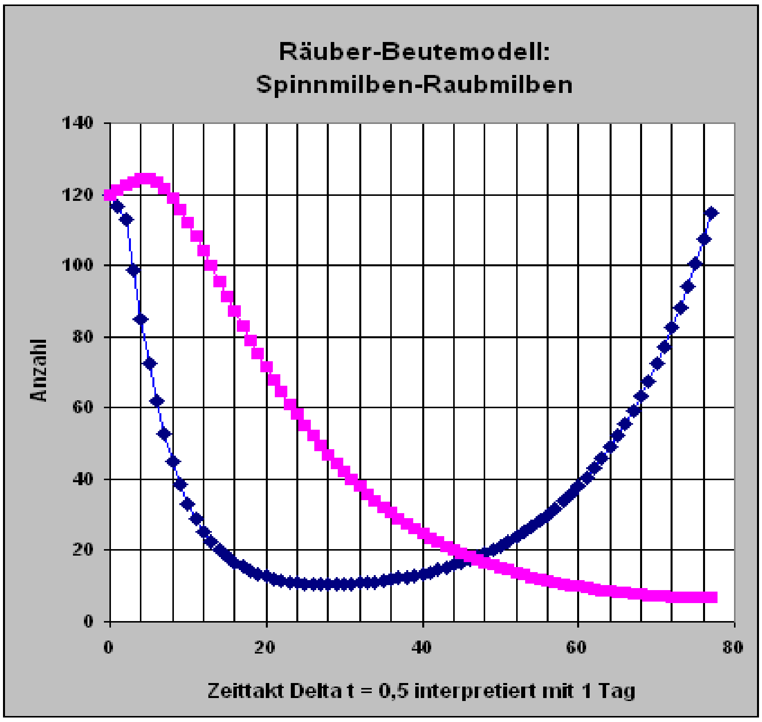
Das nachfolgende erste Simulationsergebnis passt zu den Werten der Tabelle, wobei der rechnerische Zeittakt von Δt = 0,5 mit 1 Tag interpretiert worden ist. So erhält die rein rechnerische Maßzahlen-Zeitachse eine Maßeinheit; nämlich Tage. Der Prozess in der Gurkenplantage bekommt eine zeitliche Bedeutung.

Wird mit Δt = 0,1 gerechnet und wird die Interpretation eines Zeittaktes mit 1 Tag beibehalten, so erhält man das zweite Simulationsergebnis.

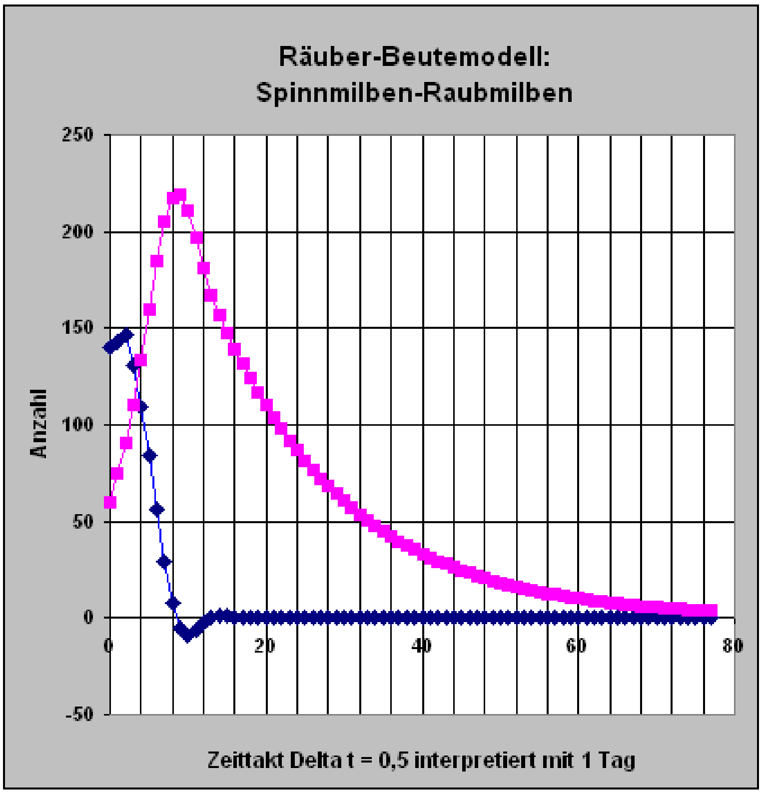
In dem dann folgenden dritten Simulationsergebnis ist der rechnerische Zeittakt wieder Δt = 0,5 und mit 1 Tag interpretiert. Die Anfangsgrößen sowohl für die Spinnmilben als auch für die Raubmilben ist auf 120 gesetzt worden. Und der Fressfaktor ist auf ff = 0,02 verdoppelt worden.


Räuber-Beutemodell:
Spinnmilben-Raubmilben
Anzahl
200
180
160
140
120
100
80
60
40
20
0
0
20
40
60
80
Zeittakt Delta t = 0,5 interpretiert mit 1 Tag


Räuber-Beutemodell:
Spinnmilben-Raubmilben
Anzahl
180
160
140
120
100
80
60
40
20
0
0
20
40
60
80
Zeittakt Delta t = 0,1 interpretiert mit 1 Tag



Wird R = 60, S = 140 und der Fressfaktor ff = 0,03 angenommen und der Nahrungsfaktor auf nf = 0,02 radikal erhöht, so erhalten wir mit $\Delta t = 0{,}5$ das dritte, nicht mehr interpretierbare Simulationsergebnis.



2.2.5 Ein Weg zu „robusten", interpretierbaren Größen für das Modell

Viele weitere Simulationen sind möglich und gestatten ein Austesten des Modells, also der Spannbreite, in der das System noch interpretierbar ist. Systematisch vorgenommene Simulationen zeigen also die mathematischen Grenzen des Modells auf.

Bei Beibehaltung von Delta t und aller Raten und Faktoren in der obigen Tabelle aber mit S=500 und R=100 ist das Simulationsergebnis mathematisch nicht mehr deutbar. Es gibt dann nämlich negative Zahlen für die Spinnmilben. Siehe hierzu auch das letzte der obigen Simulationsergebnisse. Reduziert man in diesem Fall den Nahrungsfaktor auf nf = 0,001, so ist das Ergebnis zwar wieder mathematisch deutbar aber kaum realistisch für den Plantagenbesitzer. Erhöht man dann zusätzlich den Nahrungsfaktor auf nf = 0,007, so liefert die Simulation wieder Unsinn!

Änderungen a) am Zeittakt, b) an den Anfangsgrößen für Spinn- und Raubmilben, c) an den Sterberaten für Spinn- und Raubmilben sowie d) an den Kopplungsfaktoren ff und nf wirken entscheidend auf das Verhalten des Modells ein. Übertreibungen bei diesen Größen führen sehr schnell zu nicht mehr deutbaren Simulationsergebnissen.

Wir können also feststellen:

1. Das Modell ist für einen Zeittakt (Delta t), die Raten, die Faktoren und die Anfangsgrößen nur in gewissen Intervallen mathematisch deutbar. Außerdem sind die Intervallgrenzen auch noch voneinander abhängig. Erhöht man z.B. eine Geburtenrate in extremer Weise, so hat das Einfluss auf fast alle anderen Werte.

2. Für den Zeittakt (Delta t), die Raten, die Faktoren und die Anfangsgrößen gibt es Zahlen, bei denen das Modell relativ stabile mathematische Deutungen zulässt. Diese sind aber eine notwendige Voraussetzung für eine Interpretation in die Realität. Solche Werte für Größen, bei denen das Modell relativ stabil reagiert, werden auch als robust bezeichnet. Robuste Werte können mittels abschätzender Berechnung (etwa für die Geburten- und Sterberaten) aber auch mittels Simulationen (etwa für den Zeittakt, die Anfangsgrößen, Nahrungs- und Fressfaktoren) gefunden werden.

Anmerkung: *Das Finden von robusten Werten für Geburten- und Sterberaten ist für alle Kleingruppen wichtig und müsste unbedingt in der Präsentationsphase besprochen werden. Denn die Raten hängen von der biologischen Art und auch von Umweltfaktoren ab. So entwickeln sich etwa die Spinnmilben bei einer Temperatur <18°C und >30°C und bei einer relativen Luftfeuchte von <50% schneller als die der Raubmilben.*

2.2.6 Verhaltensbeschreibung, Interpretation, Zwecke und Grenzen des Modells

Die Simulationen erlauben eine zeitliche Beschreibung (Interpretation) des Verhaltens von Raub- und Spinnmilben zueinander. Mit zunehmender Zahl von Raubmilben wird nach einer gewissen Zeit die Zahl der Spinnmilben, die zunächst noch zunehmen, kleiner. Nimmt aber die Zahl der Spinnmilben ab, so wird auch wieder nach einer gewissen Zeit die Zahl der Raubmilben kleiner. Wir haben es also mit Zeit verzögerten Entwicklungen zu tun. Sinkt die Zahl der Raubmilben unter ihre Anfangsgröße, so kann sich die Spinnmilbenpopulation wieder erholen und wächst wieder an. Der Zyklus wiederholt sich ohne Eingriff von Außen.

Ein Wachstums-Modell, das sich wie Raub- und Spinnmilben verhält, nennt man allgemein ein Räuber-Beute-Modell. Diese Art von Wachstum ist in der Ökologie häufig anzutreffen: Zwei biologische Arten verhalten sich in einem dynamischen Gleichgewicht zueinander. Natürlich sind bei anderen Arten, wie bei Fuchs und Hase, die Modellgrößen andere.

Aber diese Art des gekoppelten und Zeit verzögerten Wachstums wird auch auf andere Wirklichkeitsbereiche übertragen. So beschreibt z.B. Eduard Pestel in seinem Bericht an den Club of Rome (Jenseits der Grenzen des Wachstums, 1988) ökonomisch-gesellschaftliche Wachstumsprozesse mit „Organischem Wachstum“ (siehe Literaturverzeichnis).

Die dynamische Modellierung mit robusten Wachstumsgrößen hat unterschiedliche Zwecke.

Einerseits erhalten wir etwa die folgende **qualitative Interpretation:** Simulationen mit robusten Wachstumsgrößen belegen und begründen den Vorteil einer biologischen Schädlingsbekämpfung, in der weder die eine noch die andere Art völlig ausstirbt. Bei der Behandlung mit Insektiziden würden schließlich beide Arten absterben und das hätte in der freien Natur Folgen für ein empfindliches Nahrungsnetz, das ja noch viel komplexer und auch komplizierter ist.

Andererseits können die Simulationen des Modells dabei helfen, in einer Gurken-Plantage, in der sich Spinnmilben ausgebreitet haben, ökologisch sinnvolle Schritte zu gehen. So erhalten wir eine **quantitative Interpretation**: Nur wenige ausgesetzte Raubmilben dezimieren die Spinnmilben in relativ kurzer Zeit. In dem von uns simulierten Fall, in dem die robusten Wachstumsgrößen experimentell abgeschätzt worden sind, sind die Spinnmilben nach 50 Tagen nahezu komplett beseitigt. Zwar leben dann sehr viele Raubmilben. Aber sie schaden den Pflanzen nicht. Die Raubmilben sterben dann quasi einen Hungertod. Würden dann aber nach zwei Monaten (60 Tagen) die Pflanzen nicht geerntet, so würden sich die wenigen Spinnmilben wieder vermehren und der Zyklus würde neu beginnen.

3. Skizze zur Begründung einer „Didaktik der dynamischen und funktionalen Modellierung“

3.1 Die Welt wird global, beschleunigt komplexer und vernetzter!

Bereits 1972 wurde die Studie „Die Grenzen des Wachstums“ von Donella und Dennis L. Meadows zur Zukunft der „Weltwirtschaft“ veröffentlicht und dem Club of Rome übergeben. In einem Computermodell wurden die globalen Wechselwirkungen zwischen Industrialisierung, Bevölkerungswachstum, Ernährung, Ausbeutung von Rohstoffreserven und Zerstörung von Lebensraum untersucht und in verschiedenen Szenarien mit unterschiedlichen Annahmen durchgerechnet (mehr dazu im Kapitel 7 und in MMM auf der mathematischen Hilfeseite ma7655.htm).

1992 wurden „Die neuen Grenzen des Wachstums“ von Eduard Pestel (Pestel, 1992) veröffentlicht und im „30-Jahre-Update“ (2004) erneut aktualisiert. Neue Erkenntnisse und die in der Zwischenzeit eingetretenen Entwicklungen wurden in die aktualisierten Simulationen aufgenommen, dennoch blieben die Ergebnisse in der Tendenz ähnlich.

Schlüsselprobleme sind für Wolfgang Klafki (wikipedia/Schlüsselprobleme) die wesentlichen Inhalte der Allgemeinbildung. Dazu zählen Frieden, Umwelt, Leben in der einen Welt, Technikfolgen, Demokratisierung, gerechte Verteilung in der Welt, Gleichberechtigung/Menschenrechte und Glücksfähigkeit. In allen Schulfächern sollen auf diese Schlüsselprobleme hin fokussiert exemplarisch die Bildungsinhalte vermittelt werden. Klafki und andere (u.a. das Forum für Verantwortung) leiten die Schlüsselprobleme aus den epochaltypischen Aufgaben der Menschheit ab, die vorerst nicht so bald gelöst werden können und deshalb auf absehbare Zeit Probleme darstellen, auf die der Bildungsprozess vorzubereiten hat.

Neuerdings belegt der Wissenschaftliche Beirat der Bundesregierung Globale Umweltveränderungen (WBGU) durch seine Forschungen, “**dass die zukünftige Entwicklung der Menschheit nur innerhalb eines begrenzten Entwicklungskorridors erfolgen kann**. Werden dessen Ränder überschritten, verliert die Entwicklung den Charakter der Nachhaltigkeit, etwa weil sie die Umwelt oder die sozialen und wirtschaftlichen Systeme überstrapaziert.“ Und weiter stellt er fest, dass „die Entwicklung der menschlichen Gesellschaft und die Veränderungen der Umwelt eng miteinander verflochten und nicht mehr als getrennte Prozesse zu verstehen sind und die hohe Komplexität der Zusammenhänge, die Analyse, Modellierung und übersichtliche Darstellung erschwert.“ ... „Um die Wechselwirkungen und Dynamiken im System Erde seit Beginn der Neuzeit zu verstehen, müssen Gesellschafts- und Naturwissenschaften interdisziplinär zusammenarbeiten“. Hierfür hat der WBGU den „Syndromansatz“ erdacht. „Syndrome (Krankheitsbilder der Erde) sind typische Ursache-Wirkungs-Muster des Globalen Wandels mit Auswirkungen auf Umwelt und gesellschaftliche Entwicklung.“ Bereits 1996 hat er die wichtigsten ‚Krankheitsbilder’ benannt, wie etwa:

a) Raubbau an natürlichen Ökosystemen,

b) Umweltdegration durch

(1.) industrielle Landwirtschaft, infolge Abbau nicht-erneuerbarer Ressourcen und

(2.) weiträumige Verteilung zumeist langlebiger Wirkstoffe,

c) Schädigung von Naturräumen durch Tourismus,

d.) Vernachlässigung ökologischer Standards im Zuge eines hochdynamischen Wirtschaftswachstums und

e) Umweltgefährdung durch Deponierung von Abfällen.

Heute (Dezember 2009) bietet der WBGU insgesamt 18 Hauptgutachten zu Syndromen an z.B.: Sicherheitsrisiko Klimawandel, Armutsbekämpfung durch Umweltpolitik, Energiewende zur Nachhaltigkeit, Erhaltung und nachhaltige Nutzung der Biosphäre (mehr dazu unter http://www.wbgu.de/wbgu_download.html und auch im Kapitel 7 dieser Schrift).

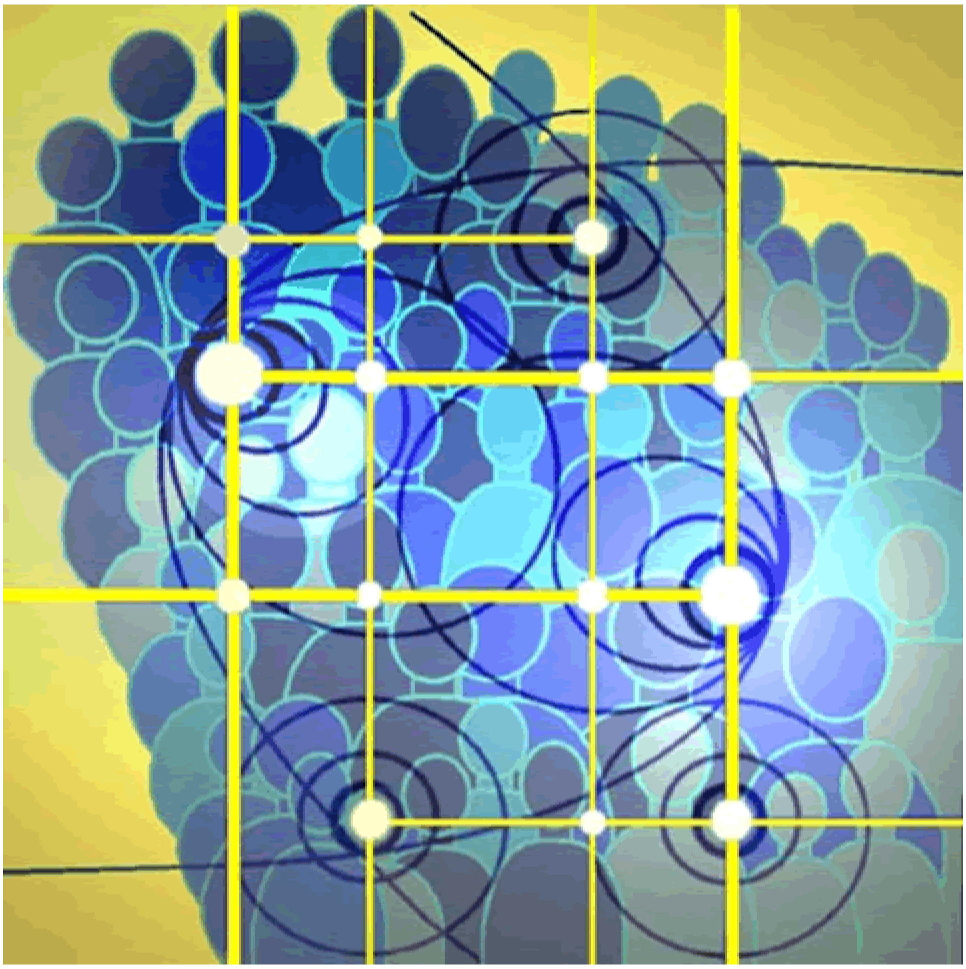
3.2 Herausforderungen für die Schule

Neben diesen allgemein-didaktischen Herausforderungen gibt es derzeit auch methodisch orientierte Antworten auf die Herausforderungen unserer Zeit, etwa: **Globales Lernen oder Systemisches und vernetztes Denken oder Denken und Handeln in Netzen**.

„Das Bildungskonzept **Globales Lernen** will zu Weltoffenheit und Empathie erziehen. Es ist inhaltlich und methodisch ganzheitlich orientiert und vermittelt fächerübergreifend Wissensinhalte zu Eine-Welt-Themen und nutzt dabei innovative, partizipative Lernmethoden.“ Dabei wird versucht, vom heute üblichen Kategoriendenken (erste, zweite und dritte Welt) wegzukommen und global für die gesamte Welt zu denken und zu handeln. Eine wichtige Rolle spielen die Fragen nach der Verwirklichung von Menschenrechten, der globalen Gerechtigkeit und nach den Bedingungen für eine friedliche Welt“ (siehe: wikipedia/Globales_Lernen). „Globales Lernen ist (also) eine pädagogische Antwort auf die globalen Entwicklungs- und Zukunftsfragen sowie der Kernbestandteil einer Bildung für nachhaltige Entwicklung. Wobei unter einer nachhaltigen Entwicklung verstanden wird, dass die Bedürfnisse der heutigen Generation befriedigt werden, ohne die Lebensgrundlagen kommender Generationen zu gefährden. Siehe: http://www.globales-lernen.de.

Systemisches oder vernetzten Denken hat bereits Mitte der 80er Jahre im Spiel Ökolopoly von F. Vester (Vester, 2002) Eingang gefunden. Sein biokybernetischer Denkansatz bezieht sich auf die Inhalte vieler Fächer, ist aber qualitativer Natur. Wie im Fernsehen und in den Tages- und Wochenzeitungen wird in der Regel lediglich mit „je mehr ... desto mehr“ oder „je weniger ... desto mehr“ oder „je mehr ... desto weniger“ oder „je weniger ... desto weniger“ argumentiert. Und ganz viele Menschen interpretieren diese Zusammenhänge als lineare. Ein Denkfehler, der gewaltige Folgen für die Menschheit haben kann. Auch darauf wurde schon 1989 durch Dietrich Dörner (Dörner 1989) in seinem Buch „Die Logik des Misslingens - Strategisches Denken in komplexen Situationen“ verwiesen.

Mit der Methode der „system dynamics" (die von Jay Forrester erfunden und von seinen Schülern Donella und Dennis Meadows in „Grenzen des Wachstums, 1972" genutzt wurde) können komplexe, dynamische Systeme im gesellschaftlichen, naturwissenschaftlichen, wirtschaftlichen und/oder technischen Kontext in vielen Fächern (also nicht nur in Mathematik) untersucht werden. Und diese Zusammenhänge sind in der Regel nicht linear!



Vernetzte empathische Zivilisation, vlü 2010 (Bildanregung durch Jeremy Rifkin: Die empathische Zivilisation, Wege zu einem globalen Bewusstsein, Campus Verlag, 2010)

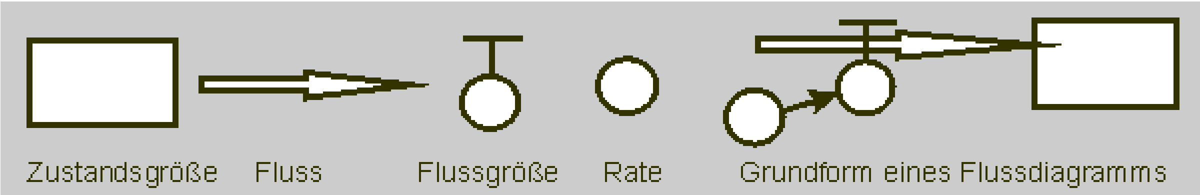
Die Methode, in Netzen zu denken, unterstützt das globale Lernen und führt über eine funktionale und dynamische sowie statistische Modellierung eines realen Problems zu Erkenntnissen, wie nachhaltig, also langfristig wirksam, vernünftig und verantwortlich gehandelt werden ***sollte***, wie also etwa die oben genannten Entwicklungskorridore (WGBU) eingehalten werden könnten. Dabei geht es um Hoffnungsmodelle für nachfolgende Generationen und nicht um Untergangsszenarien.

Das **Erkenntnisinteresse** (ob wissenschaftlich orientiert oder handlungs- und anwendungsbezogen) **richtet sich** insbesondere **beim dynamischen Modellieren** immer **auf interdisziplinäre Sach- und Wirkzusammenhänge**. Sie werden funktional, dynamisch und statistisch modelliert und auch numerisch (also quantitativ) simuliert, um so zu quantitativen, insbesondere aber zu qualitativ-interpretativen Verhaltensaussagen über die komplexen „Syndrome" oder „Schlüsselprobleme“ zu gelangen. (Mehr dazu in allen Beispielen dieser Schrift; siehe aber auch die dokumentierte, ausgewählte Literatur im Literaturverzeichnis.)

3.3 Begriffe und Symbole der systems dynamics – Exkurs in die Analysis

Zustandsgrößen oder Bestandsgrößen wie Spinnmilben, Raubmilben, Infizierte, Gesunde, Arbeitslose, BIP, Investition oder Konsum beschreiben quantifiziert (in Anzahl, Gewicht oder Währung) den Zustand des betrachteten dynamischen Systems oder Modells. Sie beginnen mit einer Anfangsgröße. Als Symbol für eine Zustandsgröße wird in der Regel ein Rechteck gewählt. Zustandsgrößen können einen Zufluss oder einen Abfluss haben. Sie können aber auch beides unabhängig von einander besitzen oder einen Durchfluss charakterisieren. Schließlich kann eine Zustandsgröße auch mehrere Zu- und Abflüsse haben.

Flussgrößen beschreiben die Veränderung der Zustandsgrößen. Das sind z.B. Spinnmilben_ Geburten, Raubmilben_Todesfälle, Neu_Infizierte, Geheilte, Konsumzunahme oder einfach Zunahme oder Abnahme. Mathematisch betrachtet können Flussgrößen auch Änderungsraten sein. Sie wirken auf den Fluss, der die Zustandsgrößen in einem Zeittakt **Δt** verändert. Als Symbol für den Fluss wird ein Doppelpfeil und für die Flussgröße ein „Ventil im Fluss“ gewählt.



Wortmodelle oder Prosamodelle beschreiben das dynamische Modell oder dynamische System mit Worten.

Wirkungsdiagramme beschreiben das aufeinander Einwirken der Größen in einem Pfeildiagramm.

Flussdiagramme (auch Simulationsmodelle genannt) beschreiben und quantifizieren die Zusammenhänge in den oben dargestellten Symbolen.

Zustandsgleichungen beschreiben, wie im Zeittakt Δt aus einem Zustand_alt der Zustandsgröße immer wieder ein Zustand_neu berechnet wird. Die Grundform lautet:

Zustand_neu ← Zustand_alt + Δt*Flussgröße

Z_neu ← Z_alt = Δt*F

ΔZ = Δt*F

Der erste Zustand_alt ist immer die **Anfangsgröße**. Dann wird im **Zeittakt Δt** der Zustand_neu schrittweise berechnet. Dieser Zeittakt ist keine Größe, also frei von Maßeinheiten. Er definiert und ordnet auf einer Zeitachse lediglich eine endliche, diskrete Menge rationaler Zahlen.

Parameter, Konstante oder Funktionen wie z.B. Geburtenrate oder Geburtenzahl, Konsumabnahme- oder Investitionskoeffizient sowie Kopplungs- oder Verzögerungsfaktor wirken auf die Flussgrößen ein. Die Grundform diese **Modellgleichung** lautet:

Flussgröße = Zustand_alt * Parameter (oder Konstante oder Funktion)

F = Z * p oder F = p * Z

Zustandsgleichungen lassen sich auch als Differenzengleichung oder sogar als Differentialgleichung aufschreiben:

ΔZ/Δt = F oder dZ/dt = F

Die Modellgleichung definiert die/eine Randbedingung der Differenzen- oder Differentialgleichung:

ΔZ/Δt = p * Z oder dZ/dt = p * Z

Anfangsgrößen, Parameter und Zeittakt müssen das zu untersuchende Modell möglichst realistisch mit **Größen** beschreiben. Daher ist mit der Setzung dieser Größen in einer dynamischen Modellierung immer auch eine sachbezogen-interdisziplinäre Analyse und Bedeutungszuweisung notwendig.

Computerprogramme wie Stella, Dynasys oder PowerSim haben die Methode der Flussdiagramm-Symbolik weiterentwickelt. Dynamische Modellierungen sind aber auch mit Excel möglich. So geschieht es in dieser Schrift.

Ein kleiner Exkurs in die Analysis

Für diesen Exkurs werden hier die Zustands- und Modellgleichungen des Räuber-Beutemodells aus Kapitel 2.2 genommen.

$$S\_neu \leftarrow S\_alt + \Delta t * (SG - ST); \quad \text{Anfangsgröße } S = 100;$$

$$R\_neu \leftarrow R\_alt + \Delta t * (RG - RT); \quad \text{Anfangsgröße } R = 70;$$

$$SG = gs * S; \quad gs = 0{,}35$$

$$ST = ss * S * R * ff; \quad ss = 0{,}17; \quad ff = 0{,}01$$

$$RG = gr * R * S * nf; \quad gr = 0{,}22; \quad nf = 0{,}005$$

$$RT = sr * R; \quad sr = 0{,}11$$

Das Differenzengleichungssystem dieses Räuber-Beutemodells würde wie folgt lauten:

$$\Delta S = \Delta t * (gs * S - ss * ff * S * R)$$

$$\Delta R = \Delta t * (gr * nf * R * S - sr * R)$$

Und würde diese Differenzengleichung dann in die bekannte Symbolik der Analysis übersetzt, so würde der folgende **Typ eines Differentialgleichungssystems** über der Menge der reellen Zahlen entstehen:

$$dS/dt = a * S - b * S * R$$

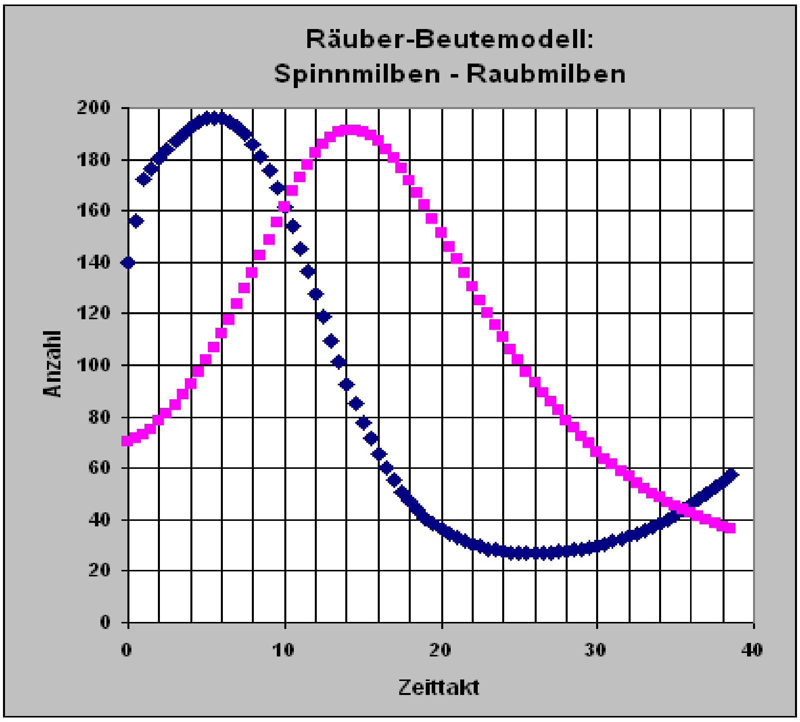
$$dR/dt = c * R * S - d * R$$

Mathematisch lässt sich beweisen, dass dieser Typ eines Differentialgleichungssystems eine **Lösung [S(t); R(t) mit t Element der Menge der reellen Zahlen]** besitzt. Findet man diese Lösung, so enthalten die Lösungsterme S(t) und R(t) auch die Formvariablen oder Parameter a, b, c und d. Eine rein mathematisch orientierte Parameterdiskussion könnte sich anschließen. Und das alles wäre dann auch mathematisch exakt.

Im realen Fall sind jedoch die meisten Parameter durch den konkreten Sachverhalt vorgegeben. Der reellen Lösung des Differentialgleichungssystems nähert man sich dann durch eine diskrete Rechenfolge mittels des Differenzengleichungssystems. Gleichzeitig werden dabei die nicht konkret bestimmten Parameter simulativ bestimmt. Genau das geschieht mit den Zustands- und Modellgleichungen im obigen Räuber-Beutemodell. Diese schrittweise, rechnerisch diskret bestimmte Lösung ist aber der reellen Lösung umso näher, je kleiner der Rechenschritt Δt gewählt wird. Aber im Prinzip geht es jetzt darum, eine sinnvolle und sachgemäße Interpretation zu finden. Und davon gibt es immer mehrere und nicht genau eine. Hierzu zwei Beispiele zum obigen Räuber-Beutemodell, für zwei unterschiedlich gewählte Zeittakte Δt:

Erster Fall: Δt = 0,5

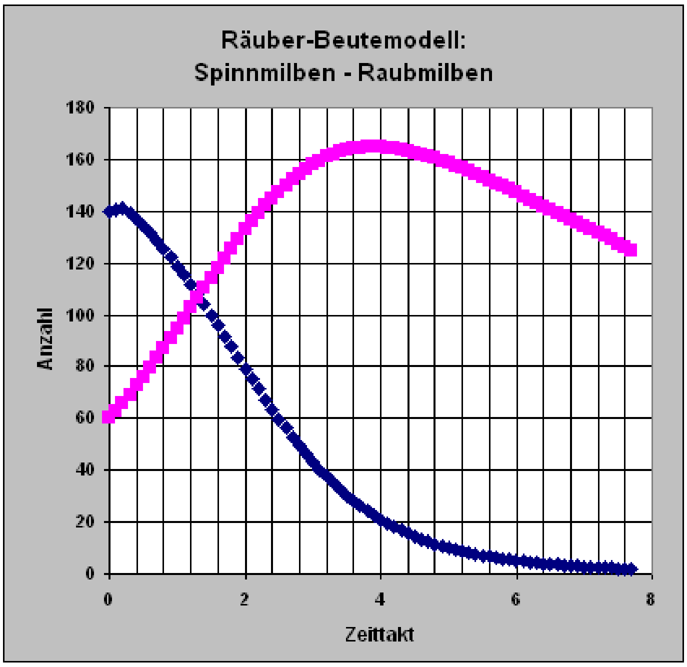
Einen Ausschnitt aus der zugehörigen Excel-Tabelle siehe auf Seite 28. Die vollständige Tabelle enthält 77 Rechenschritte, die natürlich beliebig ergänzt werden könnten.



Die Zeitachse des dynamischen Räuber-Beutesystems ist im Zeittakt von Δt = 0,5 geeicht. Sie ist eine reine Zahlengerade mit 77 diskreten rationalen Zahlen, zu denen jeweils ein S(t) und R(t) berechnet worden ist. Aber die Zahlen auf dieser Zahlengeraden sind reine Maßzahlen (rationale Zahlen), die noch keine Maßeinheit besitzen.

Zweiter Fall: Δt = 0,1

Einen Ausschnitt aus dieser Excel-Tabelle siehe in MMM auf der Seite Fehler bei der Modellbildung und Simulation – ein Exkurs in die Analysis (ma7460.htm). Auch diese Tabelle enthält 77 Rechenschritte.



Die Zeitachse des dynamischen Räuber-Beutesystems ist nunmehr im Zeittakt von Δt = 0,1 geeicht. Auch sie ist eine reine Zahlengerade mit 77 diskreten rationalen Zahlen, zu denen jeweils ein S(t) und R(t) berechnet worden ist.

Im realen Fall ist aber der Zeittakt durch einer Größe (Maßzahl * Maßeinheit) zu interpretieren. In konkreten Fällen kann es dann sinnvoll sein, den Zeittakt 0,5 oder auch den Zeittakt 0,1 mit 1 Tag (oder gegebenenfalls auch mit 1 Stunde oder 1 Woche oder 1 Monat oder 1 Jahr) zu interpretieren. Welche Bedeutung zugewiesen wird, hängt vom speziellen Fall ab und begründet sich durch den Sachverhalt. Es gibt keine mathematisch eindeutige Zuordnung mehr, sondern nur noch unterschiedlich begründete, sinnvolle Bedeutungen!

Verweise auf vertiefende Ausarbeitungen in der Lernumgebung MMM

- Wortmodell > Wirkungs- & Flussdiagramm > Gleichungen > Simulation (ma7415.htm)
- Systeme, Untersysteme und ihr Verhalten (ma7420.htm)
- Modellanalyse, quantitative und qualitative Modelle (ma7430.htm)
- Fehler bei der Modellbildung und Simulation – ein Exkurs in die Analysis (ma7460.htm)
- Blicke in Zukunft und Vergangenheit (ma7480.htm)
- MBS-Werkzeuge zur Modellierung und Simulation dynamischer Systeme (ma9200tm)

3.4 Herausforderungen für den Mathematikunterricht

Die in Deutschland für alle Bundesländer verbindlichen Bildungsstandards (ma8380.htm) für den Mathematikunterricht reagieren auf die zuvor beschriebenen Herausforderungen. Ähnlich antworten aber auch andere Länder in ihren „Rahmenlehrplänen". Neben den inhaltlichen Kompetenzen (sie waren schon immer zentral als Stoffplan in den Lehrplänen vorhanden) werden nun auch allgemeine (oder prozessbezogene) Kompetenzen formuliert, die am Ende der Sekundarstufe 1 und 2 erworben sein sollen.

In der Folge wird zunächst am **Beispiel der Kernlehrpläne Mathematik für NRW** verdeutlicht, wie durch die Arbeit an realen Situationen aus „Mathe Überall" und realen Problemen aus „Modellieren mit Mathe" die allgemeinen (prozessbezogenen) Kompetenzen durch Mathematik-Lehrkräfte vermittelt und so durch die Lernenden erworben werden können. Sodann wird ein Vorschlag unterbreitet, wie **funktionale und dynamische Modellierungen in das Schulcurriculum Mathematik**, als wichtige zukunftsorientierte Kompetenzen, eingebettet werden können.

3.4.1 Prozessbezogene oder allgemeine Kompetenzen[2]

1. Argumentieren / Kommunizieren

bis Jahrgang	6	8	10	
Informationen	wiedergeben	strukturieren	analysieren	
	Sachverhalte	Arbeitsschritte	Zusammenhänge	erläutern
Im Team Lösungswege	besprechen	vergleichen	überprüfen und bewerten	
	Ideen	Lösungswege	Problembearbeitungen	vortragen
	Begriffe	Begriffe	Verfahren	in Beziehung setzen
	intuitiv	wissensbasiert	unter Nutzung mathematischer Symbolik	begründen

Beispielformulierungen zu diesen Kompetenzen; bezogen auf die Arbeit mit MMM

- Die zu einem realen Problem aufbereiteten und verfügbar gemachten Sachinformationen und Daten bezogen auf eine zu lösende Aufgabe wiedergeben oder/und strukturieren oder/und analysieren können.
- Zusammenhänge und Wechselwirkungen verbal erläutern und beschreiben können.
- Sich im Team für die Lösung einer Problemfrage sowie eines Lösungsverfahrens entscheiden können und Lösungswege besprechen und/oder vergleichen und/oder überprüfen und/oder bewerten können.

2 Diese und die folgenden Tabellen fassen die allgemeinen Kompetenzerwartungen am Ende der Jahrgangsstufen 6, 8 und 10 (Kernlehrpläne NRW, Seite 18 - 31) in jeweils einer zusammen.

- Den Lösungsweg einer funktionalen oder dynamischen Modellierung unter Nutzung vereinbarter mathematischer Symbole und Begriffe im Team darstellen, diskutieren und begründen können.
- Eine Problembearbeitung mittels funktionaler oder dynamischer Modellierung so in der Klasse vortragen bzw. präsentieren können, dass alle anderen folgen können und dann die Lösung auch miteinander diskutieren können.

2. Problemlösen

bis Jahrgang	6	8	10
Problemstellungen	finden, wiedergeben	untersuchen	zerlegen
bei der Problemlösung	Näherungswerte / Schätzwerte, elementare Regeln bzw. Verfahren, sinnvolle Beispiele verwenden, ausprobieren	planen und beschreiben, Algorithmen, bereits Bekanntes, verschiedene Darstellungsformen Nutzen, verallgemeinern, mehrere Lösungen und Lösungsansätze überprüfen	von den Voraussetzungen ausgehend oder vom Ziel rückwärts eine Begründungskette erarbeiten
Ergebnisse	deuten	überprüfen	
Lösungswege		überprüfen	vergleichen und bewerten

Beispielformulierungen zu diesen Kompetenzen; bezogen auf die Arbeit mit MMM

- Innerhalb der komplexen realen Probleme sich für sich für die Arbeit an einer Problemfrage entscheiden, sie in der Gruppe wiedergeben und untersuchen können.
- Bei einer Problem"lösung" mittels Punkt-Diagrammen (und anderen graphischen Darstellungsformen) von Zeitreihen für zukünftige Entwicklungen Schätz- oder Näherungswerte angeben und deuten können.
- Zukunftsaussagen mittels Extrapolationen (also mit Termen) überprüfen, vergleichen und bewerten (interpretieren) können.
- Die Unsicherheit einer Zukunftsaussage mittels unterschiedlicher Extrapolation (also mit unterschiedlichen Termen) miteinander besprechen und bewerten können.
- Verhaltensaussagen über dynamische Systeme mittels Simulationen (auf der Grundlage von Zustandsgleichungen und graphischen Darstellungsformen) qualitativ und/oder quantitativ formulieren und auf den Zweck des Modells hin bewerten können.
- Eine Problemlösung bzw. einen Lösungsweg verständlich für alle anderen in der Klasse vortragen bzw. präsentieren können.

3. Modellieren

bis Jahrgang	6	8	10	
	Sachaufgaben	Realsituationen	insbesondere Wachtumsprozesse	in mathematische Modelle übersetzen (Terme, Diagramme, Tabellen, Graphen)
mathematische Modelle einer Situation	überprüfen	überprüfen und verändern	vergleichen und bewerten	
einem mathematischen Modell	eine passende	Realsituation	zuordnen	

Funktionale, dynamische und statistische Modellierungen sind das Kernanliegen in der Lernumgebung Modellieren mit Mathe (MMM).

In MMM sind alle (z.Zt. dreiunddreißig) realen Probleme (als Syndrome oder Schlüsselprobleme unserer Zeit) inhaltlich so aufbereitet, dass sie - mindestens in Teilproblemen immer noch als Realsituation oder als Sach“aufgabe“ - im Mathematikunterricht behandelbar und vermittelbar sind. Diese Art von Sachaufgabe unterscheidet sich aber wesentlich von den in Schulbüchern konstruierten. Hierzu siehe in MMM die Ausführungen unter: „Reale Probleme und nachhaltiges Lernen sowie reale Probleme und mathematische Inhalte“ (ma8105.htm).

In der Lernumgebung „Mathe Überall“ (MÜ) sind für die Klassen 4 bis 7 Realsituationen in derselben Weise wie in MMM aufbereitet. In dieser Lernumgebung gibt es auch Realsituationen zur Abbildungsgeometrie.

Beispiele für dynamische Modellierungen werden in dieser Schrift in den Kapiteln 2, 5, 6 und 7 vorgestellt. Ihre unterrichtliche (didaktisch-methodisch-organisatorische) Einbettung wird im Kapitel 4 in allgemeiner Weise beschrieben. Beispiele für funktionale Modellierungen werden in der Schrift „Funktionale Modellierung von Zusammenhängen“ exemplarisch am Beispiel der linearen, quadratischen und exponentiellen Funktion ausgeführt.

Warum diese allgemeine Kompetenz des mathematischen Modellierens so wichtig ist, dieses ist in Kapitel 3.1 und 3.2 begründet und beschrieben worden.

Gerade aber die dynamische Modellierung wird für eine verantwortliche und aktive Teilhabe an demokratischen Willensbildungen und Entscheidungen immer wichtiger sein, in einer Welt stetig wachsender Komplexität und Vernetzung.

Mit der mathematischen Modellierung realer Probleme und dabei insbesondere auch mittels dynamischer Modellierung können u.a. folgende zukunftorientierte Kompetenzen vermittelt und erworben werden. Sie sind prozessorientiert und gleichzeitig auch inhaltlich orientiert:

- Datensätze in Diagrammen darstellen und über gefundene Terme Trends berechnen sowie die Graphen interpretieren und bewerten können; also funktionale Analysen im Kontext eines realen Problems durchführen, interpretieren und bewerten können. Ggf. Korrelationen finden und „berechnen“ sowie interpretieren und bewerten können.

- Funktionale, dynamische und statistische Modellierungen an realen Problemen zum Erkenntnisgewinn nutzen und daraus ggf. Handlungsstrategien ableiten und beschreiben können.
- Reale Probleme mit der mathematischen Methode der „systems-dynamics“ beschreiben, darstellen, modellieren, programmieren, simulieren, interpretieren und beurteilen können. Das bedeutet im Einzelnen:
    - In realen Problemen wesentliche, zusammenwirkende, rückgekoppelte, zeitverzögerte oder wechselwirkende Zustandsgrößen mit Worten beschreiben, entdecken und analysieren können.
    - Das Wechselwirkungsgefüge in einem Wirkungsdiagramm darstellen und qualitativ beschreiben können.
    - Im Wirkungsdiagramm die Zustände, Flüsse und Parameter ausmachen und die Anfangszustände möglichst realistisch beschreiben können.
    - Das Wirkungsdiagramm in ein quantitatives Flussdiagramm übertragen können.
    - Rückgekoppelte, zeitverzögerte oder wechselwirkende Zustandsgrößen analysieren sowie ihre Zustandsgleichungen aufstellen und quantifizieren können.
    - Die auf die Zustandsgrößen wirkenden Flussgrößen - und auf diese einwirkende Parameter – analysieren und mathematisch in weiteren Modellgleichungen beschreiben können.
    - Zustandsgleichungen und Modellgleichungen (u.a. in Excel) programmieren können.
    - Die programmierten Modelle simulieren, in ihrem Verhalten, ihrem Zweck und in ihren Grenzen beschreiben, deuten und interpretieren können.
    - Mit prototypischen dynamischen Modellen (wie: unbegrenztes Wachstum, Wachstum auf beschränkter Fläche, Räuber/Beute, Nahrungsnetz, ...) experimentieren können und sie bei der Arbeit an realen Problemen anwenden können.
    - Die Prototypen (oder Archetypen) dynamischer Modelle als eine abstrakte mathematische Metasprache (genauso wie Funktionstypen eine abstrakte Beschreibungssprache sind) erkennen und deuten können.
    - Komplexe Systeme in solche Subsysteme zerlegen können, die bereits getrennt vom Ganzen systemisch untersucht werden und auch so schon zu wesentlichen Einsichten führen können.
    - Subsysteme wieder zu einem dynamischen „Ganzen“ zusammenbinden kön-

nen, sowie das Verhalten des Ganzen studieren und im Verhalten qualitativ und ggf. auch quantitativ beschreiben können.

Siehe hierzu auch die konkreten Kompetenzbeschreibungen in MMM u.a. auf den Folgeseiten von: ma1110.htm; ma1160.htm, ma1170.htm, ma1220.htm, ma1230.htm, ma1330.htm, ma1430.htm, ma1550.htm, ma1620.htm, ma1670.htm, ma1910.htm, ma1920.htm, ma1960.htm.

4. Werkzeuge nutzen

Die Lernumgebungen MMM und auch MÜ sind selbst hypermediale Medien. Zu jedem realen Problem oder jeder realen Situation gibt es neben den aufbereiteten Sachinformationen auch **kommentierte Links ins Internet**. Auch sie können zur **zusätzlichen Informationsbeschaffung** genutzt werden.

bis Jahrgang	6	8	10	
	Lineal, Geodreieck, Zirkel	Tabellenkalkulation, Geometriesoftware, Taschenrechner	Funktionsplotter	nutzen
			ein geeignetes Werkzeug auswählen und nutzen	
Ergebnisse / Daten	auf Folie, Plakat, Tafel, im Merkheft / Lerntagebuch	unter Zuhilfenahme einer Tabellenkalkulation		zusammenstellen und präsentieren
			geeignete Medien zur Dokumentation und Präsentation auswählen	
Zur Informationsbeschaffung	Heft und Schulbuch	Lexika, Schulbücher, Internet	Medien aller Art	nutzen

Zur **Präsentation von Modellierungsergebnissen** nutzen die Jugendlichen sehr gerne das Programm **PowerPoint**. Es kann aber zum bebilderten Herunterrasseln der Ergebnisse verführen und ist dann **kontraproduktiv für ein aktives Zuhören** der Anderen, was aber notwendig ist, um die Ergebnisse in einer Diskussion zusammenzuführen.

Tabellenkalkulationsprogramme bieten sich sowohl zur funktionalen als auch dynamischen Modellierung in besonderer Weise an. Sie sind nach allen Erfahrungen auch schon ab Klasse 4 verständlich nutzbar, wenn man sich jahrgangsbezogen auf die Funktionen des Werkzeugs beschränkt, die zur Lösung einer Realsituation oder eines realen Problems notwendig sind. Excel ist ein solches Werkzeug[3]. Und da es weit verbreitet ist, bietet es sich geradezu an (siehe in MMM die Seite „Das Werkzeug Excel: Crash-Kurse zur selbstständigen Einarbeitung“ - ma9050.htm). In Systematisierungsphasen im Unterricht bieten sich auch CAS als Werkzeuge an (siehe in MMM die Seite „Computer-Algebra-Systeme: u.a. Beispiele zur selbstständigen Einarbeitung in Derive“ - ma9300.htm).

Mit **Simulationsprogrammen** wie Dynasys und PowerSim (ma9200.htm) können Flussdiagramme direkt auf dem „Computerbildschirm“ abgebildet und dann nach Eingabe von Anfangsgrößen und Parameterwerten sofort simuliert und dann interpretiert werden. Die Zustandsgleichungen und weiteren Modellgleichungen formuliert das Werkzeug. Sie müssen nicht selbstständig aufgestellt werden. Jedoch sollten diese Werkzeuge erst bei fortgeschrittenen Kenntnissen in der dynamischen Modellierung eingesetzt werden. Schließlich sei noch einmal ausdrücklich hervorgehoben, dass Werkzeuge und Neue Hypermedien kein Selbstzweck sind. Sie müssen das Lernen qualitätsvoller machen, sonst sind sie überflüssig. Und: Bei jeder Mediennutzung sollten auch die medienpädagogischen Anliegen nicht vergessen werden.

Exkurs zur Messung des Lernerfolgs beim systemischen Denkens: Bereits 1992 wurden durch das Landesinstitut für Schule und Weiterbildung in Soest erste Schulversuche mit dem Programm MODUS zur dynamischen Modellbildung durchgeführt. Dazu wurden im Unterricht „fertig programmierte, dynamische Modelle“ simuliert und interpretiert. Das damalige Ergebnis war nicht überzeugend. „Das Werkzeug diente dem Schüler nicht als Werkzeug zur Bearbeitung bestimmter ökologischer Probleme (...), sondern es war selbst das Thema. Das Medium war die Botschaft“ (Ossimitz, 2000). Diejenigen Lehrer haben die besten Lernerfolge, zeigt eine Studie von Ossimitz aus dem Jahr 1994, „die einerseits selbst ein gewisses Faible für systemisches Denken entwickelten und die anderseits auch am konsequentesten versuchten, systemische Sachzusammenhänge zum Unterrichtsthema zu machen. (...) Ein wesentlicher Erfolgsfaktor scheint das Üben im Umgang mit systemischen Darstellungsformen (Wirkungsdiagramm, Flussdiagramm) zu sein“ (Ossimitz, 2000, S 241). Gerade auch bei den Mathematik-Lehrkräften stieß das „Fahren von fertig programmierten Modellen“ auf keine große Akzeptanz. Daher ist es ratsam, dass die Jugendlichen bei der dynamischen Modellierung auch die Zustands- und Modellgleichungen selbst erstellen, selbst in einer Excel-Tabelle programmieren und dann simulieren.

3.4.2 Mathematisch inhaltliche Kompetenzen

In der Folge wird für Fachkonferenzen in Schulen ein Vorschlag unterbreitet, in welcher Klassenstufe und in welcher zeitlichen Abfolge die inhaltlichen mathematischen Kompetenzen zur funktionalen und dynamischen Modellierung in das Mathematik-Curriculum einer Schule eingebettet werden können. Diese Modellierungen benötigen in den unteren Jahrgangsstufen insgesamt etwa 20 Unterrichtsstunden von den insgesamt ca. 240 verfügbaren Mathematik-Unterrichtsstunden in einem Schuljahr. In den Jahrgangsstufen ab Klasse 8 sind etwa 30 Un-

3 Excel kann ohne Probleme durch das frei verfügbare Open Office ersetzt werden.

terrichtsstunden notwendig. Wird ein umfangreiches Projekt durchgeführt, so erhöht sich die Zahl auf etwa 40 Unterrichtsstunden. Die folgenden Anregungen müssen natürlich in der einzelnen Schule noch konkretisiert werden!

Funktionale und dynamische Modellierung in der Klassenstufe 5 bis 6 auf der Grundlage von Realsituationen aus der Lernumgebung MatheÜberall[4]

Quartal	Inhaltliche Kompetenzen	Beispiele für mögliche reale Situationen
Herbst	Graphische Darstellung und Interpretation von vorgegebenen Daten	z.B.: „beleidigen, rempeln, schlagen, boxen, treten, ...“ (ma0110.htm)
Winter	Dreisatz, Kalkulationen in der Menge der ganzen Zahlen, graphische Darstellungen	z.B.: „Obstsalat für das Schulfest“ (ma0720.htm) oder „Ein Besuch beim Gemüsehändler“ (ma0750.htm) oder „Erdbeeren zum Selberpflücken!“ (ma0530.htm) oder Unser Traum: Ein neuer Schulhof (ma0720.htm)
Frühjahr	Addition und Multiplikation in N; (einfache dynamische) Wachstumsprozesse	z.B.: „Und plötzlich hustet die ganze Klasse“ (ma0810.htm) oder „Spiele mit dem Prinzip Weitersagen“ (ma0120.htm)

In der **Lernumgebung Mathe Überall** gibt es auch einige Realsituationen, die vornehmlich in eine **statistische Modellierung** führen. Zum Beispiel:

Große Jungs und kleine Mädchen - for ever and a day? (ma0320.htm) oder

Warst du aber ein Pummelchen! (ma0330.htm) oder

Wasser ist einfach wunderbar! - Haben wir genug davon? (ma0420.htm)

Darüber hinaus enthält die **Lernumgebung MatheÜberall** auch Beispiele zur **geometrischen Modellierung**. Zum Beispiel:

Spiegel-Symmetrien überall - auch an eurem Körper! (ma0660.htm) oder

Kreissymmetrien alltäglich - um euch! (ma0670.htm) oder

Ornamente, Parkettierungen und Muster - ....! (ma0680.htm)

4 ***Anmerkungen:*** Im Sommer-Quartal könnte jeweils eine geometrische Modellierungsarbeit durchgeführt werden. Zur funktionalen Modellierung siehe auch die Schrift „Funktionale Modellierung“.

Funktionale und dynamische Modellierung in der Klassenstufe 7 bis 8 auf der Grundlage von realen Problemen aus der Lernumgebung MMM

Quartal	Inhaltliche Kompetenzen	Auswahl möglicher realer Probleme
Herbst	Dreisatz, Prozent- und Zinsrechnung sowie lineare Funktionen	z.B.: Freier Markt – faire Preise (ma0310.htm) oder Extreme Armut - Hunger lebenslänglich? (ma0330.htm) oder ...
Winter	Lineare Funktionen, Lineares und unbegrenztes dynamisches Wachstum	z.B.: Machtlos gegen Gewalt? (ma0110.htm) oder Handy, Internet, MP3 Player: mögliche Geldsorgen und Bedrohungen (ma0210.htm) oder
Frühjahr	Lineare Funktionen und auch schon andere funktionale Abhängigkeiten sowie weitere dynamische Wachstumsprozesse ggf. auch mit zwei Zustandsgrößen	z.B.: Wohlstand für alle! Vision oder Möglichkeit? (ma0320.htm) oder Wenn sich Gerüchte ausbreiten oder Medien Wirklichkeit er-zeugen! (ma0120.htm) oder Ökologischer Landbau: u.a. umweltschonende „Schädlings-“ und „Unkraut“-Bekämpfung (ma0910.htm) (siehe hierzu Kapitel 2.1 und 2.2) oder ....

Funktionale und dynamische Modellierung in der Klassenstufe 9 bis 10

Quartal	Inhaltliche Kompetenzen	Auswahl möglicher realer Probleme
Herbst	Quadratische und ganzrationale Funktionen	z.B.: Werden die Reichen immer reicher? (ma0230.htm) oder ...
Winter	Funktionale Abhängigkeiten, dynamische Wechselwirkungen zwischen zwei und mehr Zustandsgrößen	z.B.: AIDS, Grippe SARS und andere „moderne“ Epidemien? (siehe Kapitel 6) oder Klimawandel auf der Erde - unumgänglich? (siehe Kapitel 5) oder ...
Frühjahr	Quadratische und rationale Funktionen Wechselwirkungen zwischen zwei und mehr Zustandsgrößen	z.B.: Arbeit für alle!?! (siehe Kapitel 7) oder Ökologischer Landbau: u.a. umweltschonende „Schädlings-“ und „Unkraut“-Bekämpfung (siehe Kapitel 2.1 und 2.2) oder ....

Funktionale und dynamische Modellierung in der Klassenstufe 11 bis 12

Quartal	Inhaltliche Kompetenzen	Auswahl möglicher realer Probleme
Herbst	Exponential- und Potenzfunktionen	z.B.: .: AIDS, Grippe SARS und andere „moderne“ Epidemien? (siehe Kapitel 6) oder Bevölkerungsexplosion; oder? (siehe Kapitel 7) oder
Winter	Dynamische Wechselwirkungen zwischen mehr als zwei Zustandsgrößen, Korrelationen	z.B.: Klimawandel auf der Erde - unumgänglich? (siehe Kapitel 5 und 7) oder Energie“Hunger“: Stillbar mit welchen Kosten und Folgen? (ma530.htm) oder
Frühjahr	Exponential- und Potenzfunktionen, Korrelationen, Wechselwirkungen zwischen mehr als zwei Zustandsgrößen	z.B.: Artensterben heute: erschöpfte Natur? - Krisen der biologischen Evolution (ma0920.htm) oder Fische in „Seenot“! - Alles nur Panikmache? (ma960.htm) oder Wachstum, Wachstum ... : Boom ohne Grenzen? (siehe Kapitel 7)

Natürlich kann die zeitliche Aufeinanderfolge auch eine andere sein. Der Beginn mit funktionalen und dynamischen Modellierungen sollte aber in einer Anwendungsphase des „herkömmlichen“ Mathematikunterrichts erfolgen. Ein zweiter Durchgang kann dann auch projektorientiert ablaufen. Wichtig ist, dass schließlich beide Modellierungsarten im Zusammenhang vorkommen. Projekte haben den höchsten Freiheitsgrad für die Selbstregulierung des Lernens und zur Verwirklichung der Interessen der Lernenden. Nutzen die Jugendlichen die in MMM ausgearbeiteten möglichen Lösungen, so ist dies dann kein Schaden, wenn ihre eigenen Leistungen dabei deutlich sichtbar bleiben.

In MMM sind, wie zuvor beschrieben, sowohl die prozessbezogenen als auch die inhaltlichen Kompetenzbereiche augenfällig deutlich repräsentiert. Durch die Verwendung der Lernumgebung MMM erhält eine Schule also ohne große Vorarbeit die Möglichkeit, die Realisierung der genannten Kompetenzbereiche in ihr schulinternes Curriculum zu übernehmen.

3.4.3 Exkurs: Qualitative und quantitative Modellierung

Die Unterscheidung beginnt bei den verwendeten Darstellungsformen. Verbale Beschreibungen (auch Prosamodell oder Wortmodelle genannt) und Wirkungsdiagramme (auch Wirkungsstrukturen genannt) gehören zur qualitativen Modellierung. Gefragt wird: Aus welchen Teilen besteht das System? Wie sind sie miteinander verknüpft? Wie beeinflussen sie sich gegenseitig? Und auch die Beschreibungen erfolgen qualitativ etwa mit „je mehr ... desto mehr“ oder „je weniger ... desto mehr“ ... oder auch damit, dass von positiver, negativer, eskalierender, verstärkender oder negativ stabilisierender Wirkung gesprochen wird.

Flussdiagramme (auch Simulationsmodelle genannt) sowie Zustands- und Modellgleichungen mit ihren Anfangsgrößen, Systemparametern, Laufzeitparametern und Konstanten gehören zur quantitativen Modellierung. Aber so trennscharf, wie es sich in dieser Gegenüberstellung (und auch in der Literatur) anhört, ist es nicht (siehe hierzu auch G. Ossimitz, 2000, Seite 79).

In der Regel beginnen alle Modellierungsarbeiten mit einer Festlegung des Modellzweckes in einem Wortmodell sowie mit einer qualitativen Analyse von aufeinander wirkenden Größen, von funktionalen Beziehungen sowie von Rückkopplungen, Wechselwirkungen und Zeitverzögerungen zwischen ihnen und einer darauf folgenden Darstellung der Systemik in einem Wirkungsdiagramm (Pfeildiagramm oder Netzdiagramm). Dann erst erfolgt eine Quantifizierung zunächst in einem Flussdiagramm und sodann in Zustands- und Modellgleichungen, um so das entstehende Modell programmieren und dann simulieren zu können. Schließlich folgt eine Verhaltensbeschreibung auf den Zweck des Modells hin. Diese kann quantitativ sein, wenn es sich um eine reale Vorhersage handelt. In der Regel sind aber die Verhaltensbeschreibungen – mindestens in der Schule – qualitativer Natur. Es geht um Einsichten in aggregiertes System-Verhalten, das natürlich auch Anregungen zum Handeln geben kann.

Dynamische Modellierungen führen also zu Beschreibungen des Systemverhaltens von dynamischen Modellen, die zu einem bestimmten Zweck untersucht wurden. Sie erlauben Aussagen darüber, wie eine Veränderung der Parameter im System wirken kann, in welcher Richtung ihre Veränderung verheerende oder günstige Auswirkungen hat. Erkenntnisse dieser Art basieren zwar auf quantitativen Abhängigkeiten. Sie sind schließlich aber in der Regel qualitativer Natur. Siehe hierzu die konkreten Verhaltensbeschreibung und Interpretation in den Kapiteln 2, 5, 6 und 7.

Das Ziel einer dynamischen Modellbildung im Mathematik-Unterricht besteht also nicht darin, „zuverlässige“, prognostische Ergebnisse für eine zukünftige Entwicklung zu liefern. Das unterrichtliche Ziel liegt insbesondere darin, Erkenntnisse über kritische Größen aus ihrer strukturellen Beschaffenheit heraus zu gewinnen, um so zu erkennen, wie es der WBGU formuliert, dass die zukünftige Entwicklung der Menschheit nur innerhalb eines begrenzten ‚Entwicklungskorridors’ erfolgen kann.

Bei den Berechnungen des jeweiligen neuen Zustandes in einem dynamischen Modell spielt der Laufzeitparameter (Delta t) eine entscheidende Rolle. Immer haben wir es aber mit diskreter Mathematik zu tun. Diskret erstens, weil die Grundmenge für die Berechnungen immer eine diskrete und endliche Teilmenge der rationalen Zahlen ist. Und diskret zweitens, weil alle Berechnungen in einem Zeittakt (Delta t) erfolgen, der immer eine rationale Größe ist. Der alte Zustand wirkt in diesem Zeittakt auf den neuen Zustand ein. Ein Problem stellt dann schließlich aber die Interpretation dieses Zeittaktes dar. Mathematisch gesehen ist die Zeitachse ohne Dimension. Es ist eine reine Zahlengerade. Aber zur Interpretation in die Realität wird eine Zeitgröße benötigt. Fehlerbetrachtungen zur Lösung der Zustandsgleichungen können also sowohl unter einem rein mathematischen als auch unter einem zweckhaft interpretativen Blickwinkel durchgeführt werden. Mehr dazu ist in MMM unter Fehler bei der Modellbildung und Simulation – diskrete Mathematik (ma7460.htm) beschrieben.

Bei der Modellierung komplexer Systeme gibt es in der Regel für das System der Zustandsgleichungen keine geschlossenen algebraischen Ausdrücke. Im Leistungskurs Mathematik in Klasse 11 oder 12 kann ggf. die Zustandsgleichung als Differenzengleichung oder (unter Annahme eines stetigen Definitionsbereiches) als Differentialgleichung beschrieben werden.

Funktionale Modellierungen führen zu Beschreibungen von Verläufen in der Vergangenheit und versuchen über funktionale Approximationen (mit Trendlinien) zu Prognosen für die nahe Zukunft zu gelangen. Die so gefundenen Funktionen werden dabei als über der Menge der reellen Zahlen definiert angenommen. Nur so sind dann z.B. Ableitungen der Funktion möglich. Erkenntnisse dieser Art sagen, wie es war und wie es ggf. sein wird, wenn sich die Bedingungen nicht ändern. Die Unsicherheit der Prognosen lässt sich über die Steigungen der Funktionen im Endbereich der Vergangenheitsdarstellung abschätzen. Mehr dazu ist in MMM unter Blicke in Zukunft und Vergangenheit (ma7480.htm) beschrieben.

Alle mathematischen Hilfen (es sind z. Zt. insgesamt 55) zur Bearbeitung systemdynamischer Anforderungen sind im Bereich „Umgang mit Komplexität: Netze und dynamische Systeme“ (ma7400.htm) gebündelt. Lehrkräfte, die mit der Vermittlung von Kompetenzen zur dynamischen Modellierung beginnen, werden insbesondere noch auf die folgenden Seiten in MMM aufmerksam gemacht:

Reale Probleme und nachhaltiges Lernen (ma8105.htm) und

Eine neue Unterrichtskultur ist not-wendig (ma8200.htm). [Das Wort „notwendig“ ist mit einem Bindestrich geschrieben, um seine Ableitung von „Not wenden“ zu betonen.]

3.4.4 Widerstände gegen eine dynamische Modellierung

Systemdynamische Aufgabenstellungen können von überschaubaren bis hin zu zunächst unüberschaubaren realen Problemen reichen. **Systemdynamische Methoden besitzen im Allgemeinen einen stark experimentellen Charakter und führen in der Regel zu nicht eindeutigen Ergebnissen**. Bei dieser Form des Mathematik-Treibens tritt also an die Stelle der Frage “Ist das richtig oder falsch?“ die Frage „Inwieweit ist dieses Modell (...) passend, brauchbar oder geeignet?“ Aber trotz eines immer wieder begründeten und geforderten erweiterten Verständnisses von Mathematik, muss auch heute noch festgestellt werden, dass ein Wechsel weg von der alleine vorherrschenden dualen „wahr-falsch“-Logik überhaupt noch nicht akzeptiert wird. Dies sowohl in der schulischen Mathematik als auch in der Fachwissenschaft. Und auch Jugendliche wollen wegen des vorhergegangenen Mathematik-Unterrichts wissen, ob sie ein Beispiel „richtig“ gelöst haben oder nicht. Wenn man z.B. mit Jugendlichen oder auch mit Studierenden des Lehramtes Mathematik über verschiedene Wirkungsdiagramme oder über robuste Werte für Größen diskutiert, die jeweils verschiedene Standpunkte zum selben realen Problem darstellen, dann kommt unweigerlich die Frage „Und welches dieser Diagramme oder welcher dieser Werte ist jetzt richtig?“ Dass keines dieser Diagramme und keiner dieser Werte „richtig“ und alle anderen zwingend logisch „falsch“ sind, bereitet teilweise großes Unbehagen und wird dann abgetan mit dem Argument: „Wenn es hier kein richtiges Diagramm und keinen richtigen Wert gibt, dann ist das Ganze auch keine Mathematik mehr!“ (Ossimitz, 2000, Seite 103). **Kommunikative Auseinansetzungen mit dem jeweiligen Anwendungsbereich, für den die Mathematik Erkenntnisse bereitstellt, besitzen daher eine erhöhte Bedeutung.** Daher sind Mathematiklehrerinnen und der Mathematiklehrer in einem Unterricht, in dem system-dynamische Methoden angewendet werden, als kompetente Laien (ma8150.htm) gefragt.

4. Idealtypische Unterrichtsabläufe oder Szenarien

In diesem Kapitel werden zwei idealtypische Unterrichtsabläufe (oder Unterrichtsszenarien) ausführlich mit didaktischen und insbesondere methodischen sowie organisatorischen Anregungen beschrieben. Im Kapitel 5 „Anwendung der dynamischen Modellierung ...“ sowie im Kapitel 6 „Projektorientierte Einführung in die dynamische Modellierung ...“ werden daher die dort ausgeführten Beispiele zur dynamischen Modellierung nur noch in die folgenden Unterrichtsabläufe eingebettet.

4.1 Die dynamische Modellierung in einem projektorientierten Mathematikunterricht

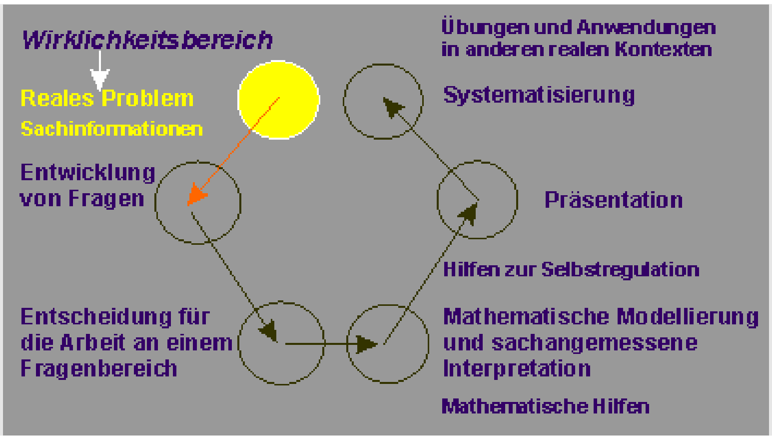
Der projektorientierte Unterrichtsverlauf ist der umfassende. Daher wird er hier zuerst beschrieben. Projekte haben im Prinzip denselben Ablauf. Aber der Freiheitsgrad in der Selbstregulierung des Lernens wird noch einmal größer. So können bei einem Projektthema (siehe Kapitel 7) die zu bearbeitenden Anforderungen auch aus unterschiedlichen realen Problemen gewählt werden. Auf diese Weise können dann auch die Interessen der Lernenden noch stärker als bei einem projektorientierten Unterricht berücksichtigt werden.

Im Vorfeld eines projektorientierten Unterrichts prüft die Mathematiklehrerin oder der Mathematiklehrer, ob und wann sich ggf. andere Lehrkräfte, die in derselben Lerngruppe (Klasse) unterrichten, beteiligen wollen. Möglich wären je nach realem Problem eine Beteiligung der Fachlehrerinnen oder Fachlehrer für Natur-, Gesellschafts- und Wirtschaftswissenschaften sowie für Religion/Ethik. Falls sie sich an diesem projektorientierten Unterricht beteiligen, stünden alle diese Fachstunden in der Klasse für das Projekt zur Verfügung. Alle beteiligten Lehrkräfte würden dann in ihren Stunden die projektorientierte Arbeit der Klasse begleiten und insbesondere diejenigen Kleingruppen der Klasse „inhaltlich“ betreuen, die an einer Frage arbeiten, die auch ihr Fach betrifft. Das setzt voraus, dass die Jugendlichen nicht zum ersten Mal selbstreguliert arbeiten.

Das Leitfach bleibt aber die Mathematik. In der folgenden Beschreibung wird sogar davon ausgegangen, dass der projektorientierte Unterricht alleine im Fach Mathematik durchgeführt wird. Der projektorientierte Unterricht im Fach Mathematik ist also nicht davon abhängig, dass sich andere Fachlehrerinnen und Fachlehrer beteiligen.

1. Unterrichtsstunde

Diskussionen zum realen Problem; Erkundung möglicher Sach-informationen



Die Mathematiklehrerin oder der Mathematiklehrer führt in eine Diskussion des realen Problems ein und verweist die Jugendlichen auf die aufbereiteten Sachinformationen zu diesem realen Problem. Sodann erteilt sie/er folgende **Arbeitsaufträge**:

1. Setzt die begonnene Diskussion in spontan gebildeten Kleingruppen fort, notiert das für euch Wichtige.
2. Lasst euch in euren Diskussionen unterstützen durch:
   a) eine mögliche Bild-Diskussionen oder eine „Geschichte" zur Problematik (immer die Seite ma0xx0a.htm)
   b) einige Blicke auf die Problemlage (immer die Seite ma0xx2.htm)
3. Legt eine Projektmappe an, in der ihr alle von euch benutzen „Arbeitsblätter", eure Modellierungs- und Diskussionsergebnisse, ggf. eure Rechercheergebnisse sowie auch eure Präsentation abheftet. Notiert dort auch, was euch sachlich betroffen macht und schreibt weiter auf, was euch gefallen oder nicht gefallen hat sowie das, was euch Schwierigkeiten im Verständnis bereitet hat.

Didaktische, methodische und organisatorische Anregungen

Die Seiten („Bilddiskussion..." und „Blicke auf...") können als „Arbeitsblätter" ausgedruckt werden. Jugendliche können dann das für sie Wichtige unterstreichen oder hervorheben. Werden die Seiten am Computer gelesen, erfolgen die Notizen in der Projektmappe. Bei der gedanklichen Organisation der komplexen Sachzusammenhänge kann auch eine Visualisierung in einer Begriffslandkarte oder einer Mindmap hilfreich sein. Zur Veranschaulichung möglicher dynamischer Zusammenhänge wird aber in jedem Fall ein Wirkungsdiagramm empfohlen. Siehe hierzu in MMM die Seite „Wortmodell > Wirkungs- & > Flussdiagramm > Gleichungen > Simulationen" (ma7415.htm) sowie „System-Archetypen für Verhaltensmuster - Kurzdarstellung und Verweise ins Internet" (ma9250.htm).

*Durch eine Auseinandersetzung mit dem oder den realen Problemen können und sollen die **persönlichen Interessen** zur **Bearbeitung einer bestimmten Frage** geweckt werden. Denn: ... „Schülerinnen und Schüler sind am aufmerksamsten und konzentriertesten, wenn sie sich mit Lernaufgaben beschäftigen, die persönlich bedeutungsvoll für sie sind oder eine sinnvolle Er-*

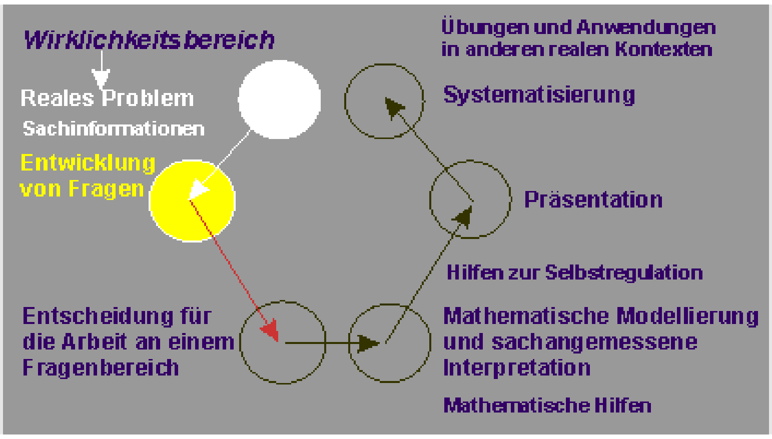
fahrung erlebbar machen. Aufgabe der Lehrenden ist es also, Betroffenheit herzustellen, d.h. eine möglichst enge Verbindung zwischen den Zielen von Schule und den Interessen der Lerner/innen herbeizuführen. Dies kann z.B. durch anregende problemhaltige Situationen geschehen, die subjektive Zugangsweisen für die Konstruktion der Schüler/innen anbieten. Um möglichst viele Schüler/innen erreichen zu können, müssen vielfältige Einstiegsmöglichkeiten, ... bereitgestellt werden, die an den verschiedenen Vorverständnissen anknüpfen und die je spezifischen Qualitäten des Vorwissens respektieren" (H. Haenisch, Soest 1999). ***Siehe hierzu aber auch die ausführlichen Texte in MMM unter*** „Reale Probleme und nachhaltiges Lernen"*(ma8105.htm).*

Diese Eingangdiskussion muss also in jedem Fall stattfinden, damit erstens die späteren mathematischen Modellierungsarbeiten im Problemkontext interpretiert werden können und zweitens auch die Diskussionen nach den Kleingruppen-Präsentationen (etwa in der 7. und 8. Unterrichtsstunde) durch die Jugendlichen in einem Problemzusammenhang geführt werden können.

Die Systematisierung zur dynamischen Modellierung erfolgt erst in der neunten Unterrichtsstunde. Das ist für viele Mathemtiklehrerinnen und -lehrer möglicherweise ungewohnt. Aber: Die Systematisierungen können dann auf den zuvor selbstreguliert durchgeführten Modellierungen aufbauen. Vor einer Systematisierung haben dann die Jugendlichen bereits die Erfahrung gemacht, dass dynamische Modellierungsformen dem Erkenntnisgewinn in realen Zusammenhängen dienen, der handlungsleitende (emanzipatorische) Ziele verfolgt.

2. Unterrichtsstunde

Entwicklung von Fragen

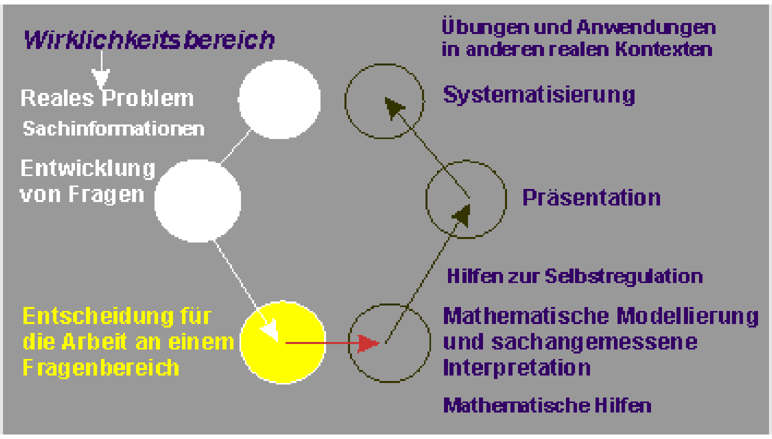


In den Kleingruppen, die sich spontan in der ersten Unterrichtsstunde gebildet haben, wird die begonnene Diskussion für etwa 25 Minuten fortgesetzt, etwa mit dem **Arbeitsauftrag**:

4. Diskutiert miteinander, welche Fragen euch ganz persönlich interessieren. Lasst euch unterstützen durch die so genannte Fragen-Seite: **Wie? Was? Warum? Mit welcher Dynamik? ...?** (das ist immer die Seite ma0xx3.htm)

Noch 2. Unterrichtsstunde

Entscheidung der Jugendlichen für einen Fragenbereich und Bildung von „interessengleichen“ Kleingruppen



Didaktische, methodische und organisatorische Anregungen

Durch die Fokussierung - des zunächst möglicherweise noch unscharf formulierten Erkenntnisinteresses - auf ***präzise Fragestellungen*** *wird die zielgerichtete Arbeit am gewählten Thema enorm unterstützt. Darüber hinaus wird die Rolle der Mathematik im Rahmen des Problemlösungsprozesses deutlicher. Diese ist nun nicht mehr nur „irgendwie“ auch mit dabei, sondern sie ist das zentrale „Werkzeug“, ohne das sachlich fundierte Antworten auf die gewählte Fragestellung kaum denkbar erscheinen.*

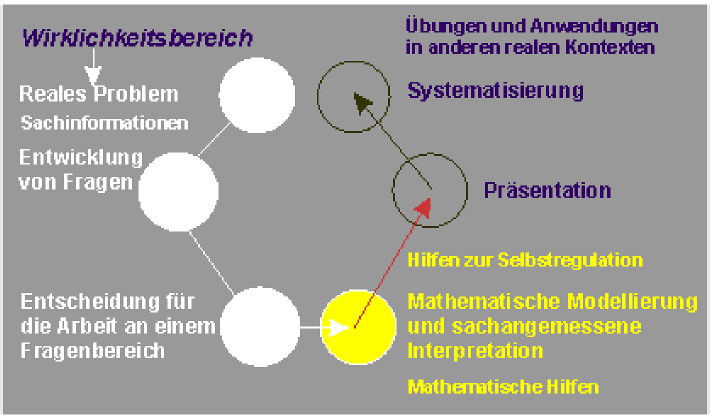
Die Lehrkraft bündelt die Fragen und organisiert auf dieser Basis quasi „interessengleiche“ Kleingruppen. Möglich ist auch eine Binnendifferenzierung nach Leistung.

Da die Lehrkraft später aber die dynamische Modellbildung systematisieren will, wird sie durch Beratung in jedem Fall erreichen, dass einige Kleingruppen an einem Aufgabenbereich ***„Konstruktion und Simulation von dynamischen Wechselwirkungen“*** *(das ist immer die Seit ma0xx8.htm) arbeiten.*

Falls später in der Systematierungsphase der ***Unterschied zwischen dynamischer und funktionaler Modellierung*** *herausgearbeitet werden soll, sollte mindestens eine Kleingruppe auch an der* ***Analyse eines funktionalen Zusammenhangs*** *arbeiten (das ist immer die Seite ma0xx7.htm).*

3. bis 6. Unterrichtsstunde

Mathematische Modellierungen in Kleingruppen, sachangemessene Interpretation und Erstellung einer Präsentation



Die „interessengleichen“ Kleingruppen erhalten nun die folgenden **Arbeitsaufträge**:

5. Arbeitet in den nächsten vier Mathematikstunden und auch Zuhause selbstreguliert (d.h. selbstständig, selbstorganisiert und selbstverantwortet) an den Fragen, die wir zuvor ausgewählt haben.
   Kleingruppe(n) 1: Konstruiert und simuliert die Dynamik von ...
   Kleingruppe(n) 2: Konstruiert und simuliert Wechselwirkungen zwischen ...
   Kleingruppe(n) 3: Konstruiert und simuliert ....
   Kleingruppe(n) 4: ggf. Analysiert den Zusammenhang von ...
6. Nutzt bei euren Modellierungsarbeiten die euch gegebenen mathematischen Hilfen zur (funktionalen und) dynamischen Modellierung und auch die Hilfen zum selbstregulierten Arbeiten.
7. Ich werde euch bei eurer Arbeit beobachten und notieren, wie ihr euch in euren Kleingruppen gegenseitig helft und wie ihr miteinander kommuniziert und kooperiert.
8. Kommt ihr nach einer eingehenden Beratung in eurer Kleingruppe mit eurer Arbeit nicht mehr weiter, so berate ich euch auf Anfrage hin.
9. Stellt eure Modellierungsergebnisse (Arbeitsergebnisse) und Interpretationen in euren Projektmappen dar.
10. Erstellt in eurer Kleingruppe ebenfalls eine Präsentation sowohl eurer Modellierungsergebnisse als auch eurer Interpretationen.

Didaktische, methodische und organisatorische Anregungen

Wiederum können die Seiten (ma0xx7.htm) und ma0xx8.htm) mit den Anforderungen ausgedruckt werden. Sie können aber auch nach Word exportiert werden und auf die konkreten Kleingruppenarbeiten hin umgestaltet werden. Sobald aber während der Modellierungsarbeiten bestimmte Datenbestände oder Informationen gebraucht werden, mathematische Hilfen genutzt werden sollen oder dynamisch modelliert wird, ist eine Arbeit am Computer notwendig.

Die Lehrkraft sollte sich unbedingt alle anklickbaren Sachinformationen und mathematischen Hilfen zum realen Problem ansehen. Das ist wichtig, um den Kleingruppen, die irgendwo stecken bleiben, Tipps zur selbstregulierten Arbeit geben zu können. Wahrscheinlich muss die Lehrkraft aber schon ab dem Ende der zweiten selbstregulierten Arbeitsstunde immer wieder darauf hinweisen, dass eine Präsentation vor der Klasse zu halten ist. Und dass die Arbeiten nach der vierten selbstregulierten Arbeitsstunde beendet sein müssen.

Während der Vorbereitung des Unterrichts und auch in der Modellierungsphase übernimmt die Mathematiklehrerin und der Mathematiklehrer in Sachfragen zum realen Problem die Rolle eines kompetenten Laien (ma8150.htm). Den Lehrkräften stehen aber auch die Sachinformationen auf den Seiten ma0xx4.htm bis ma0xx6i.htm zur Verfügung. Das sind dieselben

Sachinformationen, die auch von den Jugendlichen genutzt werden können.

Bei der modellierenden Arbeit werden die Kleingruppen von der Lehrkraft „gecoacht“. Sie hilft den Jugendlichen dabei allgemeine (prozessorientierte) mathematische Kompetenzen (ma8380.htm) zu erwerben oder anzubahnen d.h. u.a.:

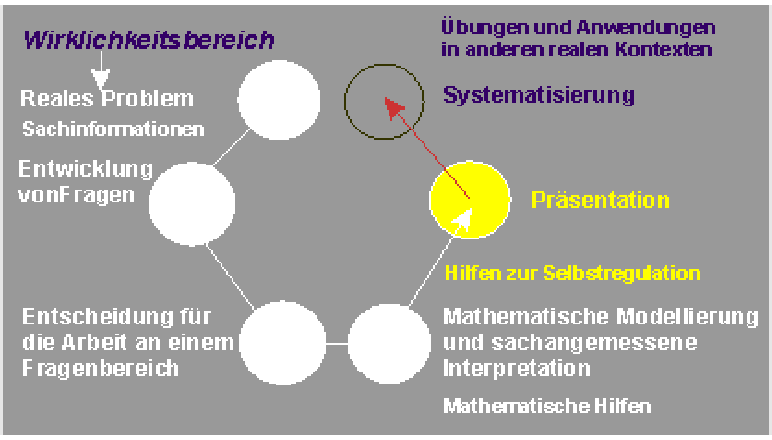
- *dass Jugendliche ihre Fragen mit Hilfe der ihnen bis dahin bekannten Mathematik beantworten können und dabei u. U. auch neue Fachinhalte entdecken können,*
- *dass sie ihre Arbeit selbst organisieren und selbst verantworten (begründen) können,*
- *dass sie eine ansprechende Präsentation erarbeiten und dann auch halten können (eine Präsentation, die ggf. auch in der Klasse ausgehängt werden kann) und*
- *dass sie Kommunikations- und Kooperationsregeln einhalten können (Anmerkung: das ist eine ganz wichtige Grundlage der Teamfähigkeit).*

Werden die prozessorientierten (oder allgemeinen) mathematischen Kompetenzen bewertet, so sollten die Jugendlichen dies vor ihrer Arbeit wissen.

An dieser Stelle sei aber darauf verwiesen, dass prozessorientierte Kompetenzen nur in einem komplexeren Arbeits- oder Lern-Prozess angebahnt und gelernt werden können.

7. und 8. Unterrichtsstunde

Präsentation der Modellierungsergebnisse und Diskussion der Ergebnisse im Sachzusammenhang des realen Problems



Die Lehrkraft stimmt sich mit den Kleingruppen ab, in welcher Reihenfolge die Präsentationen vor der Klasse erfolgen. Dann erteilt sie etwa die folgenden Arbeitsaufträge:

11. Jede Kleingruppe stellt ihre Modellierungsergebnisse vor der Klasse so vor, dass alle anderen in der Klasse sie auch verstehen und nachvollziehen können. Also: Lasst immer genügend Zeit, damit die Anderen sich auch Notizen in ihrer Projektmappe machen können. Hetzt nicht durch euren Vortrag.
12. Hilfen findet ihr unter „Anregungen zur Präsentation der Arbeitsergebnisse“ auf der Eingangsseite jedes realen Problems
13. (Ggf.: Ich habe vor, die Präsentation zu bewerten.)
14. Jede Kleingruppe beleuchtet in ihrem Vortrag das reale Problem unter einem anderen

Gesichtspunkt. Alle diese hängen aber, wie wir in der Eingangsdiskussion des Problems bereits festgestellt haben, irgendwie miteinander zusammen. Und genau das wollen wir gemeinsam diskutieren, nachdem alle Vorträge gehalten sind. So wollen wir erreichen, dass es nicht bei der Summe (Addition) der Einzelbeiträge bleibt, sondern die Diskussion ein neues Ganzes erwirkt.

Didaktische, methodische und organisatorische Anregungen

Auch das Präsentieren-Können ist eine wichtige prozessorientierte (allgemeine) mathematische Kompetenz. Die Erstellung eines präsentierbaren Produktes braucht also Zeit.

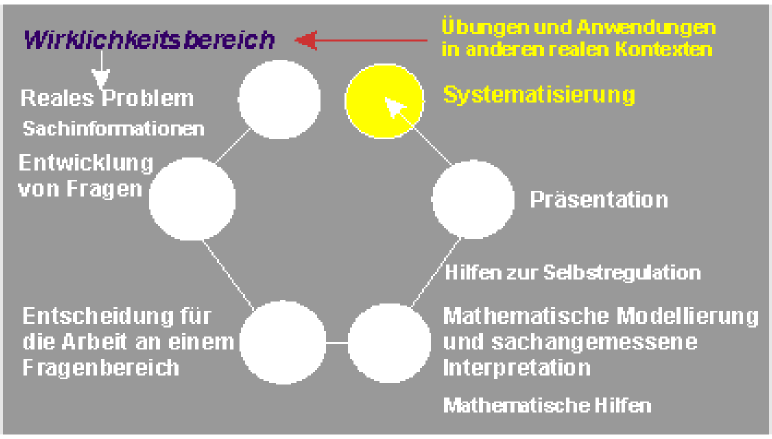
Die Jugendlichen sollen/sollten durch die Gesamtheit der Präsentationen zur Erkenntnis von Zusammenhängen und Wechselwirkungen gelangen, deren Bewertungen für ihr eigenes gesellschaftliches Handeln bedeutungsvoll sein können (emanzipatorische Kompetenzen!). Sie können die mathematischen Modellierungen als eine Erkenntnishilfe zur Bewertung des Problems erleben. Der Mathematikunterricht bekommt einen anderen Sinn als nur den, lediglich Selbstzweck zu sein. Die Jugendlichen können auch erleben, dass arbeitsteilige Teamarbeit produktiv ist und keine „Zeit“ verschwendet.

In einem abschließenden Gespräch klärt die Lehrkraft auch noch, welchen Wert eine arbeitsteilige Arbeit innerhalb eines Teams hat.

Nach diesen 3 Wochen (bei drei Mathematikstunden pro Woche) sollte in der Regel keine Klassenarbeit geschrieben werden. Zu Beginn der projektorientierten Unterrichtsphase sollte mit den Jugendlichen aber vereinbart werden, was zur Leistungsbewertung am Ende herangezogen wird (z.B. die Projektmappe, die Präsentation, die Beobachtungen zum Arbeits- und Sozialverhalten ...). Soll eine Klassenarbeit geschrieben werden, dann bieten sich aber nur Aufgaben an, die auch das zuvor Gelernte abprüfen. Solche Aufgaben sind zu finden unter Erörterung möglicher Lösungen zu realen Problemen und (Test)Aufgaben zur kompetenzorientierten Diagnose (ma8800.htm). Anmerkung: Die Anzahl der Aufgaben ist zurzeit (Mitte 2009) noch gering, sie wird aber ständig erweitert.

9. und 10. Unterrichtsstunde

Systematisierung der dynamischen Modellierung; ggf. Gegenüberstellung von funktionaler und dynamischer Modellierung



Didaktische, methodische und organisatorische Anregungen

*Die Mathematiklehrkraft wiederholt in einem **fragend-entwickelnden Unterricht** noch einmal mit ihren Worten je eine Lösung der Gruppen 1, 2 und 3. Sie lenkt **wiederholend** den Blick auf:*

- *die Größen, die den Zustand des betrachteten Modells beschreiben,*
- *den dazu notwendigen Beschreibungsbegriff: **Zustandsgröße** (mit Anfangsgröße),*
- *die Größen, die die Veränderungen der betrachteten Zustandsgrößen beschreiben,*
- *den dazu notwendigen Beschreibungbegriff: **Flussgröße**,*
- *die Konstanten und **Parameter**, die auf die Flussgrößen wirken können,*
- *den dazu notwendigen Beschreibungsbegriff **„dynamisches Modell“**, als einem zeitabhängigen Modell, dass sich in einem Zeittakt (Delta t) verändert.*

Nach Präzisierung der vorstehenden Grundbegriffe verdeutlicht die Lehrkraft in jedem Fall noch einmal:

- *die Darstellung von dynamischen Zusammenhängen in **Wirkungsdiagrammen** und **Flussdiagrammen** und den damit jeweils verbundenen Zweck,*
- *die Beschreibung der dynamischen Veränderungen in Form von **Zustandsgleichungen** für die Zustandsgrößen und weiteren **Modellgleichungen** für die Flussgrößen,*
- *die **Herleitung von** „robusten“ **Werten** für die Parameter und Konstanten (z.B. für die Raten)*
- *die **Programmierung** der Zustands- und Modellgleichungen u.a. in Excel-Tabellen zum Zwecke der **Simulation**,*
- *die Notwendigkeit einiger **Simulationsläufe** zur **Beschreibung des Verhaltens, des Zweckes und der Grenzen der Modelle,***
- *die Notwendigkeit der Interpretation des Laufzeitparameters Delta t bzw. der (reellen) Zeitachse mit einer **Zeitgröße**.*

Während dieser Systematisierung sollten die erstellten Flussdiagramme für alle sichtbar sein. Entweder erhalten alle Schülerinnen und Schüler der Klasse eine Fotokopie der Modelle oder die Modelle werden auf einer „Tapete“ aufgezeichnet und in der Klasse ausgehangen.

*Wichtig ist es festzustellen, dass die Modelle und ebenso die Zeitachse immer abhängig vom **Zweck der Untersuchung** sind. Es gibt also immer auch aufeinander aufbauende Modelle und alternative Interpretationen.*

*In jedem Fall sollte den Jugendlichen klar werden, dass wir es bei der dynamischen Modellierung mit einer numerischen, **diskreten Mathematik** zu tun haben.*

*Zur **Gegenüberstellung von dynamischer und funktionaler Modellierung** wiederholt die Lehrkraft auch die Ergebnisse der Kleingruppe(n) 4 und erarbeitet in fragend-entwickelnder Form* *die folgenden Feststellungen:*

- ***Funktionale Modellierungen** führen zu Beschreibungen von Verläufen in der Vergangenheit und versuchen über Approximationen mit Trendlinien zu Prognosen für die nahe Zukunft zu gelangen. Prognosen sind immer unsicher! Erkenntnisse dieser Art sagen aber, wie es war und wie es ggf. sein wird, wenn sich die Bedingungen nicht ändern.*
- ***Dynamische Modellierungen** führen zu Beschreibungen des Systemverhaltens von zweckbedingt untersuchten Modellen und erlauben Aussagen darüber, wie eine Veränderung der „Stellgrößen“ im System wirkt, in welcher Richtung ihre Veränderung verheerende oder günstige Auswirkungen hat. Erkenntnisse dieser Art, sind in der Regel qualitativer Natur. Sie können aber auch handlungsleitend sein.*

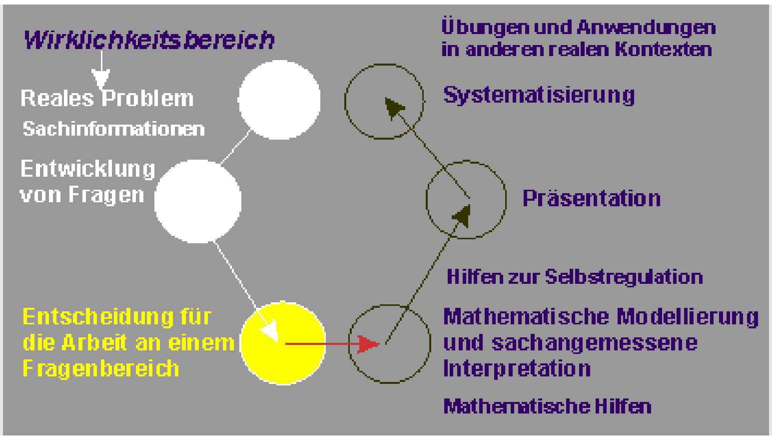
Natürlich kann bei einer ersten Einführung in die dynamische Modellierung auf einen Vergleich von funktionaler und dynamischer Modellierung verzichtet werden. Bei einer weiteren Anwendung der dynamischen Modellierung sollte dieser Vergleich aber durchgeführt werden.

4.2 Die dynamische Modellierung in der Anwendungsphase des Mathematikunterrichts

In diesem Unterricht sind die drei ersten Phasen des projektorientierten zu einer zusammengefasst. Die Vorgaben durch die Lehrkraft sind am höchsten und die Wahlmöglichkeiten durch die Lernenden am geringsten. Die Phase der Systematisierung fehlt, da hier davon ausgegangen wird, dass sie bereits erfolgt ist. Wenn das aber nicht der Fall sein sollte, so kann die Phase der Systematisierung diesem Verlauf hinzugefügt werden.

1. Unterrichtsstunde

Einführende Diskussion zum realen Problem, Entscheidung für eine dynamische (ggf. funktionale) Modellierung sowie Bildung von arbeitsteiligen Kleingruppen



Die Lehrkraft führt mit der Klasse ein Gespräch zum realen Problem. Sie lässt sich dabei unterstützen durch e**ine mögliche Bild-Diskussionen oder eine „Geschichte“ zur Problematik** (immer die Seite ma0xx0a.htm) oder/und durch **einige Blicke auf die Problemlage** (immer die Seite ma0xx2.htm). Für den Rest der ersten Unterrichtsstunde erhalten die Jugendlichen die folgenden Arbeitsaufträge:

1. Setzt euch auseinander mit den Anforderungen/Aufgaben auf der Seite: „**Konstruktion**

und Simulation von dynamischen Wechselwirkungen ...“ (immer die Seite ma0xx8.htm) und **ggf.** mit den Aufgaben auf der Seite: „**Analyse von Zusammenhängen** ...“ (immer die Seite ma0xx7.htm).

2. Entscheidet euch in eurer Kleingruppe für eine der möglichen dynamischen (oder ggf. funktionalen) Modellierungs-Aufgaben. Ich werde euch dabei beraten.
3. Legt eine Arbeitsmappe an, in der ihr alle von euch benutzen „Arbeitsblätter“, eure Modellierungs- und Diskussionsergebnisse und auch eure Präsentation abheftet. Schreibt auf, was euch Schwierigkeiten im Verständnis bereitet hat.

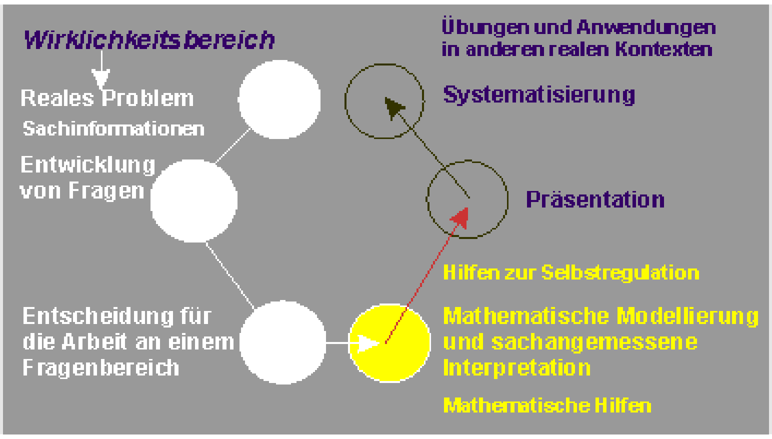
Didaktische, methodische und organisatorische Anregungen

Die Jugendlichen arbeiten auch schon in dieser 1. Unterrichtsstunde, so weit es geht, selbstreguliert. Sie wiederholen ggf. die Grundlagen zur dynamischen Modellierung oder nutzen die dazu bereit gestellten mathematischen Hilfen zum ersten Mal.

Alle weiteren Anregungen sind dieselben wie beim projektorientierten Unterricht.

2. bis 5. Unterrichtsstunde

Mathematische Modellierungen in den Kleingruppen, sachangemessene Interpretation und Erstellung einer Präsentation



*Die **Arbeitsaufträge** sind dieselben wie beim projektorientierten Unterricht.*

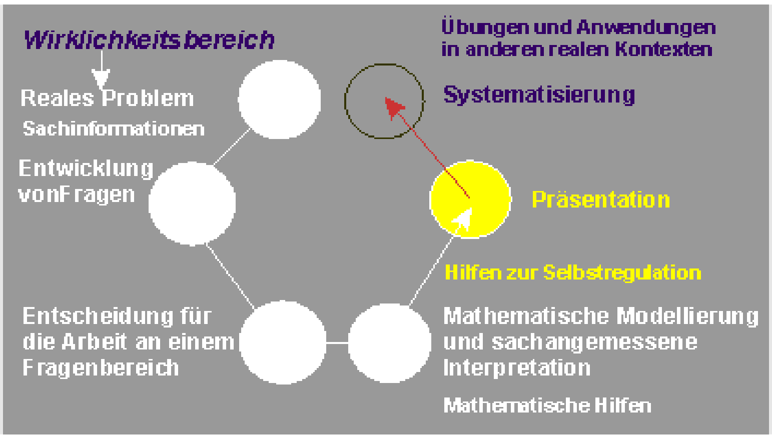
Didaktische, methodische und organisatorische Anregungen

Die Lehrkraft wird beratend in die Bildung der arbeitsteiligen Kleingruppen eingreifen und Vorschläge zur Bearbeitung von Aufgaben machen.

Alle weiteren Anregungen sind gleich mit denen beim projektorientierten Unterricht.

6. und 7. Unterrichtsstunde

Präsentation der Kleingruppen-Ergebnisse und Diskussion der Ergebnisse im Sachzusammenhang des realen Problems



*Die **Arbeitsaufträge** sind wieder dieselben wie beim projektorientierten Unterricht.*

Didaktische, methodische und organisatorische Anregungen

*Die Mathematik-Lehrkraft nutzt die Präsentationen der **Gruppen 1, 2 und 3** um die dynamischen Modellierung zu wiederholen und die Präsentationen der **Gruppen 4** dazu, noch einmal die benutzten Funktionen in den Blick zu nehmen.*

Alle Anregungen sind gleich mit denen beim projektorientierten Unterricht.

5. Die dynamische Modellierung in der Anwendungsphase des Mathematikunterrichts im Kontext des realen Problems „Klimawandel auf der Erde“

„Klimawandel auf der Erde“ (ma0550.htm)

Ohne CO2: Windenergie

und Energie aus der Sonne

auch Energie aus Atom?

In diesem Kapitel wird die dynamische Modellierung in der Anwendungsphase eines „herkömmlichen“ Mathematikunterrichts in Klasse 9 bis 11 beschrieben.

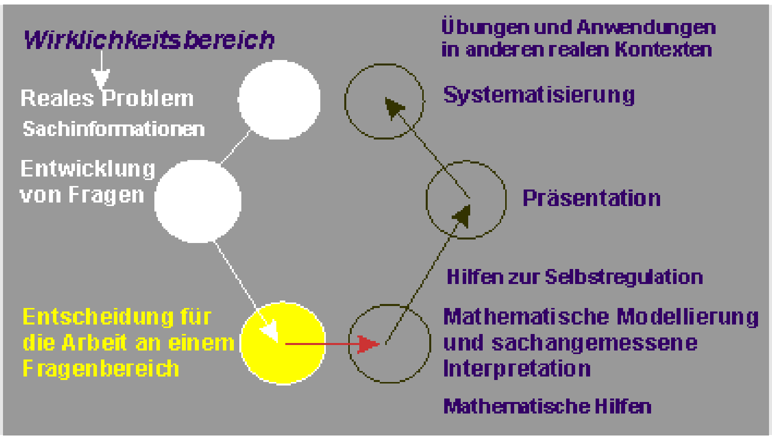
Falls im vorhergehenden Unterricht bereits einige Funktionenklassen systematisiert worden sind, ist es auch möglich, parallel zur dynamischen Modellierung ebenfalls funktional zu modellieren. Dazu siehe in MMM das Beispiel „Analyse zum Ausstoß von CO2 und zur globalen Veränderung des Klimas“ (ma1556.htm).

5.1 Einbettungen der dynamischen Modellierungsarbeiten in einen Unterrichtsablauf

Der **idealtypische Unterrichtsablauf** ist mit didaktischen, methodischen und organisatorischen Hinweisen im **Kapitel 4.2** ausführlich dargestellt. Hier wird die dynamische Modellierung nur in aller Kürze in den Ablauf des Unterrichts eingebettet.

1. Unterrichtsstunde

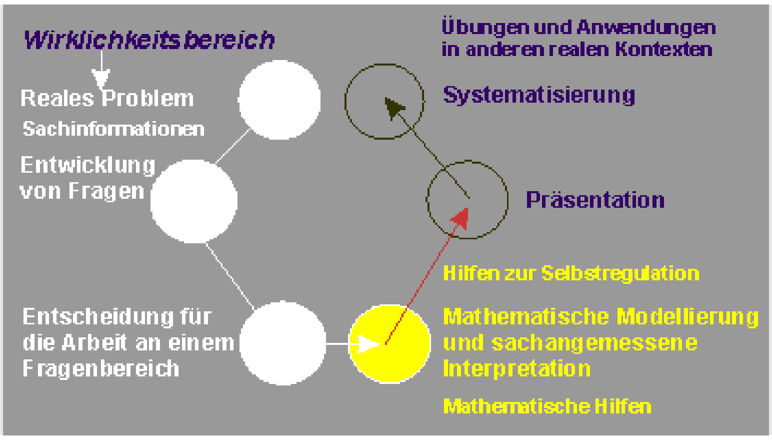
Einführende Diskussionen zum realen Problem, Entscheidung für eine dynamische Modellierung sowie Bildung von arbeitsteiligen Kleingruppen



Die Mathematiklehrerin oder der Mathematiklehrer führt mit der Klasse ein Gespräch zum ökologisch bedeutungsvollen Problem des „Klimawandels auf der Erde“ und lässt sich dabei unterstützen durch eine mögliche Bild-Diskussion (ma0550a.htm) oder durch kurze stimulierende Texte sowie durch einige „Blicke“ auf das komplexe Problem des Klimawandels (ma0552. htm).

2. bis 5. Unterrichtsstunde

Mathematische Modellierungen, sachangemessene Interpretationen und Erstellung von Präsentationen in den Kleingruppen



Die Lehrkraft schlägt drei **Arbeitsaufträge** zur dynamischen Modellierung in arbeitsteiliger Kleingruppenarbeit vor. Die Aufträge werden zunehmend anspruchvoller.

Kleingruppe(n) 1: **Konstruiert und simuliert in einem einfachen dynamischen Grund-Modell mögliche Wechselwirkungen zwischen Bevölkerung, Energieumwandlung und Anreicherung von Kohlendioxid in der Atmosphäre** (ma0558.htm#Gruppe1).

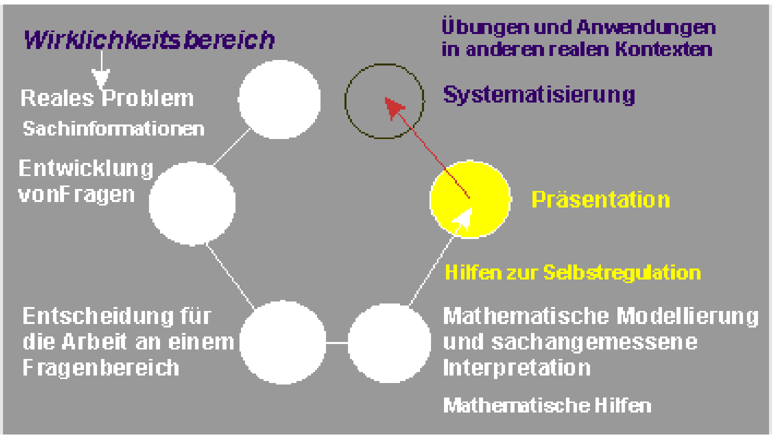
Kleingruppe(n) 2: **Konstruiert und simuliert ein Modell zu dynamischen Wechselwirkungen zwischen Bevölkerung, Energieumsatz und Kohlendioxid, wenn immer mehr fossile Energie durch erneuerbare ersetzt wird** (ma0558.htm#Gruppe2)**.**

Kleingruppe(n) 3: **Konstruiert und simuliert weitere unterschiedliche Szenarien auf dem Hintergrund energie- und klimapolitischer Diskussionen** (ma0558.htm#Gruppe3)**.**

Anmerkung: *Im folgenden Text wird die Arbeit der **Kleingruppe(n) 1 und 2** sowie im Kapitel 7.7 eine mögliche Arbeit der **Kleingruppen 3** dargestellt. Eine vollständige Lösung der Arbeit der Gruppen 1und 2 mit Verlinkungen auf das reale Problem sowie auf die erwerbbaren Kompetenzen und auf die interaktiven ExcelTabellen kann in MMM auf Seite ma1558.htm eingesehen werden.*

6. und 7. Unterrichtsstunde

Präsentation der Kleingruppen-Ergebnisse und Diskussion der Ergebnisse im Sachzusammenhang des realen Problems

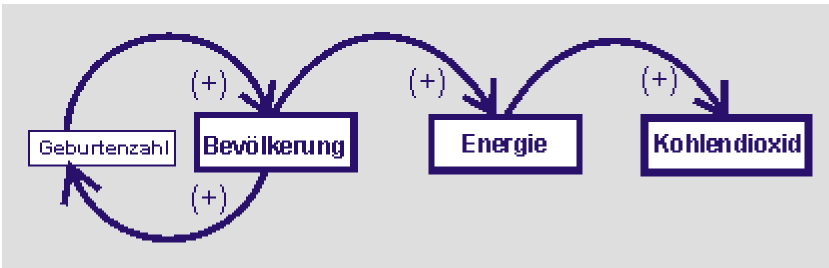


5.2 Konstruktion und Simulation eines einfachen Grundmodells zu Wechselwirkungen zwischen Bevölkerung, Energie-Umwandlung und „Anreicherung“ von Kohlendioxid in der Atmosphäre

5.2.1 Darstellung der Wechselwirkungen in einem Wirkungsdiagramm

Das folgende einfache Grundmodell beschränkt sich auf mögliche Wirkungen (Abhängigkeiten oder Bindungen) zwischen der Erd-Bevölkerung (ma0154.htm), dem Bedarf und der Umwandlung von alleine fossilen Energieträgern (ma0535.htm) und der darauf beruhenden „Anreicherung“ bzw. dem Ausstoß von Kohlendioxid (ma0535a.htm).

Im folgenden Wirkungsdiagramm wird gezeigt, wie die Geburtenzahl positiv auf das Wachsen der Erd-Bevölkerung wirkt und die wachsende Bevölkerungszahl positiv auf die Geburtenzahl zurückwirkt. Denn je mehr Menschen leben, desto mehr Kinder werden geboren. Zweitens zeigt das Wirkungsdiagramm, dass die zunehmende Bevölkerung positiv auf die Energieumwandlung wirkt. Je mehr Menschen die Erde bewohnen, desto mehr Energie wird gefordert und umgewandelt. Schließlich zeigt das Diagramm, dass je mehr fossile Energie umgewandelt wird, desto mehr CO2 wird in die Atmosphäre gelangen.



Das Wirkungsdiagramm beschreibt die Abhängigkeiten in qualitativer Form. Es wird mit dem Pluszeichen oder mit „je desto“ argumentiert.

5.2.2 Beschreibung der Dynamik in einem Flussdiagramm

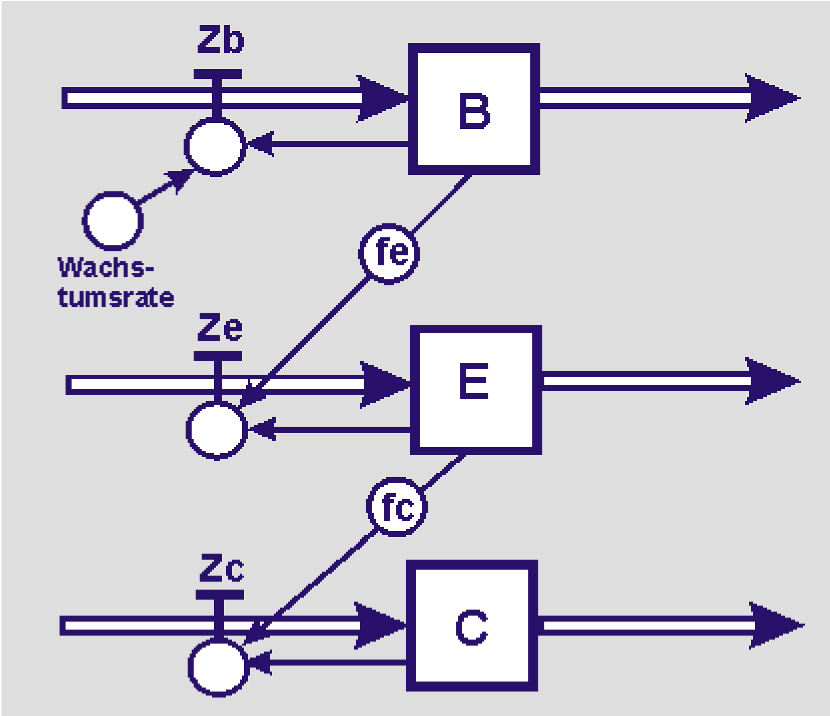
Das Wirkungsdiagramm wird in ein Flussdiagramm übertragen indem überlegt wird, welche Zustandsgrößen, Flussgrößen und Raten abstrahiert werden können.

Die Zustandsgrößen sind leicht erkennbar: Bevölkerungszahl (**B**), Gesamt**masse** der umgewandelten fossilen Energie (**E**) und Gesamt**masse** des dabei ausgestoßenen Kohlendioxids (**C**).

Die Flussgrößen müssen im Einzelnen überlegt werden. Auf die „Bevölkerungszahl“ wirkt die Flussgröße „Zunahme_Bevölkerung“ (**Zb**), die von der bereits vorhandenen Erd-Bevölkerungzahl und einer Wachstumsziffer pro Mensch pro Jahr (**r**) abhängt.

Zur „Gesamtmasse der umgewandelten fossilen Energie“ kommt jeweils die „Zunahme_Energie“ (**Ze**) hinzu. Sie hängt mit einem Faktor (**fe**) der von der Bevölkerungszahl ab.

Zur „Gesamtmasse des ausgestoßenen Kohlendioxids“ kommt jeweils die Flussgröße „Zunahme_Kohlendioxid“ (**Zc**) hinzu. Sie hängt mit einem Faktor (**fc**) von der jeweiligen Gesamtmasse der umgewandelten fossilen Energie ab.



5.2.3 Beschreibung des Modells durch Zustands- und Modellgleichungen

In den folgenden Zustands- und Modellgleichungen wird das Modell quantifiziert, indem alle Größen mit Zahlen belegt werden.

B_neu ← B_alt + Δt * Zb; Anfangsgröße **B = 7 Milliarden**;

Δt = 1 (Interpretation: Zeittakt 1 Jahr)

E_neu ← E_alt + Δt * Ze; Anfangsgröße **E = 18 GWh**;

C_neu ← C_alt + Δt * Zc; Anfangsgröße **C =27 Mill. Tonnen**;

Zb = r * B; r = 0,01 (daher Zeittakt 1 Jahr)

Ze = fe * B; fe = 0,01

Zc = fc * E; fc = **0,005**

Zur Bestimmung der Anfangsgrößen und der Wachstumsziffer r (bzw. der Wachstumsrate) der Erdbevölkerung sowie zur Abschätzung der Binde-Faktoren wird auf die folgenden Sachinformationen in MMM verwiesen:

- Wachstumszahlen, -Ziffern und –Raten“ (ma2905.htm),
- Wachstum der Weltbevölkerung (ma0154.htm),
- Energie-“Verbrauch“, (ma0534a.htm),
- Energiegewinnung aus fossilen Energieträgern (ma0535.htm),
- Ausstoß von Kohlendioxid (ma0535a.htm).

Die Anfangsgrößen der Zustandsgrößen beziehen sich etwa auf das Jahr 2008 und die beiden Binde-Faktoren fe und fc hängen, wie bereits in den Kapiteln 2.2.6 und 2.2.7 ausführlich dargelegt, vom Zweck dieses einfachen Modells ab. Mindestens müssen diese beiden Faktoren so robust sein, dass das Modell mathematisch interpretierbar ist und in einem Intervall auch bleibt. Dieses Intervall wird für eine Interpretation in die Wirklichkeit gebraucht.

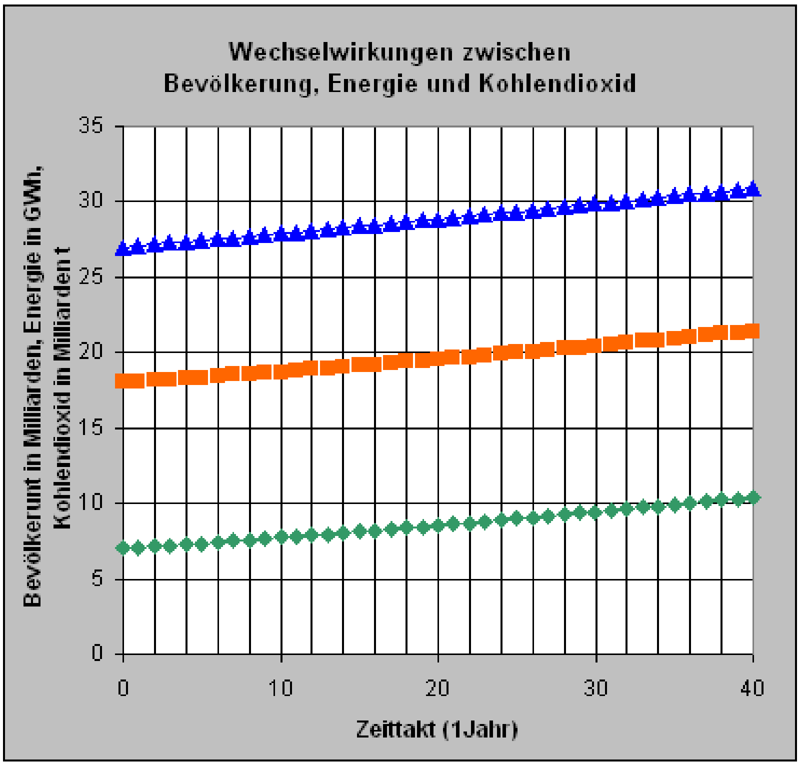
5.2.4 Programmierung der Zustands- und Modellgleichungen mit Excel

Die Zustands- und Modellgleichungen lassen sich in einer Excel-Tabelle programmieren. Alle berechneten Werte sind auf drei Stellen hinter dem Komma gerundet.

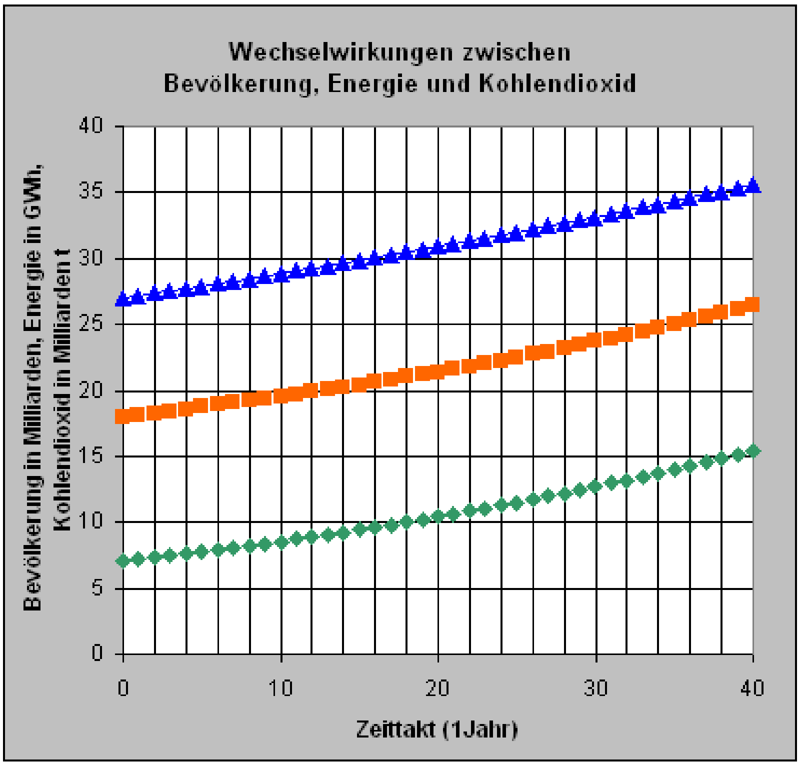
Zeit-takt	Δt	r	Zb	B in Milliarden	fe	Ze	E in GWh	fc	Zc	C in Milliarden t
0	1	0,01		7	0,01		18	0,005		27
1	1	0,01	0,07	7,07	0,01	0,07	18,07	0,005	0,09	27,09
2	1	0,01	0,071	7,141	0,01	0,0707	18,141	0,005	0,0904	27,18
3	1	0,01	0,071	7,212	0,01	0,0714	18,212	0,005	0,0907	27,271
4	1	0,01	0,072	7,284	0,01	0,0721	18,284	0,005	0,0911	27,362
5	1	0,01	0,073	7,357	0,01	0,0728	18,357	0,005	0,0914	27,453
6	1	0,01	0,074	7,431	0,01	0,0736	18,431	0,005	0,0918	27,545
7	1	0,01	0,074	7,505	0,01	0,0743	18,505	0,005	0,0922	27,637
8	1	0,01	0,075	7,58	0,01	0,0751	18,58	0,005	0,0925	27,73
9	1	0,01	0,076	7,656	0,01	0,0758	18,656	0,005	0,0929	27,823
10	1	0,01	0,077	7,733	0,01	0,0766	18,733	0,005	0,0933	27,916

5.2.5 Simulationen des Modells

Das erste nachfolgende Simulationsergebnis passt zu den Werten der Tabelle, die hier in einem Ausschnitt gezeigt wird. In der Excel-Tabelle lassen sich aber alle stärker grau unterlegten Werte ändern. Geschieht dies z.B. durch Verdoppeln der Wachstumsziffer auf **r = 0,02** und der Faktoren für die Energie- und Kohlendioxidzunahme auf **fe = 0,02** und **fc = 0,01**, so ergibt sich das zweite nachfolgende Simulationsergebnis. Viele weitere Simulationen sind möglich. Eine Veränderung der Anfangsgrößen führt in der Regel nur zu einer Verschiebung der Punkt-Diagramme auf der Hoch-Achse (y-Achse).



(Blaues Dreieck = Kohlendioxid; rotes Quadrat = Energie; grüne Raute = Bevölkerung)



5.2.6 Verhaltensbeschreibung, Interpretation, Grenzen des Modells

In diesem einfachen Grundmodell wächst mit der Bevölkerungszahl auch die Nachfrage und damit die Umwandlung von Energie. Sie stammt – so wird hier angenommen – ausschließlich aus fossilen Energieträgern, weil sie z.B. in den bevölkerungsreichsten Ländern der Erde (wie China) reichlich vorhanden sind und daher auch vornehmlich zur Energieumwandlung genutzt werden. Entsprechend steigt der Ausstoß von Kohlendioxid und die Gesamtmasse des Kohlendioxids in der Atmosphäre wächst. Die drei Zustandsgrößen hängen also direkt von einander ab. Ihre Entwicklungen verlaufen gleichförmig zunehmend.

Die Modellierung eines einfachen Grundmodells endet also - nach einer quantitativen Phase - mit einer Verhaltensbeschreibung, die wieder qualitativer Natur ist. Sie vermittelt aber bereits eine grundlegende (qualitative) Einsicht. Und diese könnte auch schon der Zweck des Modells sein.

Diese Einsicht führt aber auch zu einer neuen, weiterführenden Frage: Was könnte z.B. geschehen, wenn die bisherigen Welt-Klimakonferenzen einen Erfolg gehabt hätten, wenn also immer mehr Energie aus erneuerbaren stammen würde? Darauf gibt das einfache Grundmodell keine Antwort mehr.

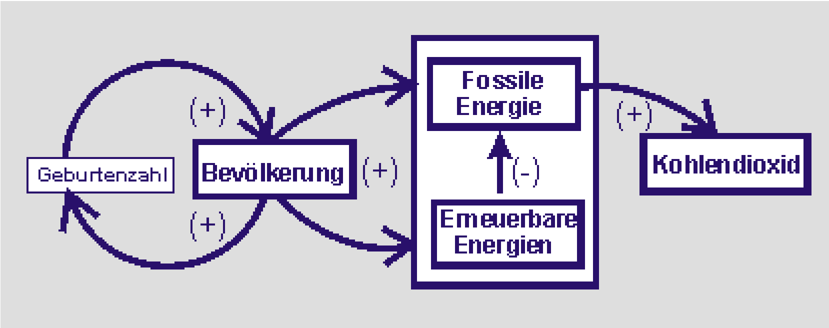
5.3 Konstruktion und Simulation eines Modells zu Wechselwirkungen zwischen Bevölkerung, Energien und Kohlendioxid unter der Annahme, dass immer mehr fossile Energien durch erneuerbare ersetzt werden

5.3.1 Darstellung der Wechselwirkungen in einem Wirkungsdiagramm

Das obige Wirkungsdiagramm und alle obigen qualitativen Beschreibungen bleiben im Prinzip erhalten.

Ergänzend wird nun aber angenommen, dass sich die von der Bevölkerung geforderten Energien (**E**) in einen Energiemix aufteilen, der lediglich zwischen Fossilen_Energien (**FE**) und Erneuerbaren_Energien (**EE**) unterscheidet. Das heißt, die geforderte Gesamt"menge" an Energie bleibt jeweils erhalten, von „Energieeinsparung" ist also z.B. noch keine Rede. Aber nur die fossilen Energien haben, wie hier angenommen wird, eine Erhöhung des Kohlendioxids in der Atmosphäre zur Folge. Je mehr erneuerbare Energien aber verfügbar sind oder werden, desto weniger fossile müssen umgewandelt werden.

Das folgende Wirkungsdiagramm beschreibt diese Abhängigkeiten in qualitativer Form. Es wird mit dem Minuszeichen oder mit „je desto" argumentiert.

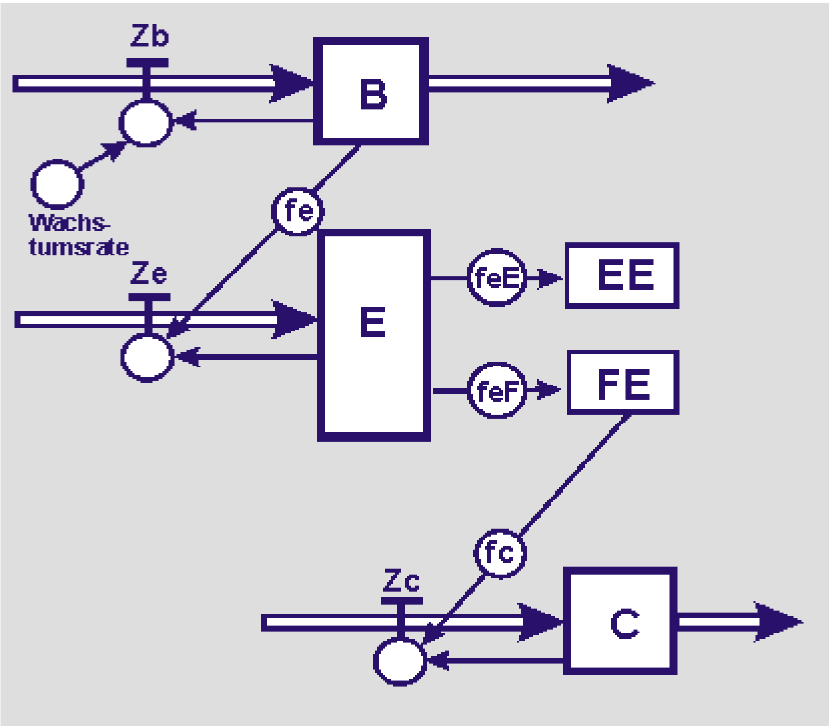


5.3.2 Beschreibung der Dynamik in einem Flussdiagramm

Für die Aufteilung der gesamten von der Bevölkerung gewollten Energie (**E**) wird ein Mix aus Fossilen_Energien (**FE**) und Erneuerbaren_Energien (**EE**) angenommen. Und nur der Anteil **FE** wirkt mit einem Faktor **fc** auf eine Steigerung des Kohlendioxidgehalts **C** in der Atmosphäre. Er wird, wie bereits im vorhergehenden Modell, mit einer Massengröße beschrieben.

Im Fall A wirken auf **E** zwei Faktoren **feE** und **feF**, deren Summe 1 ist. Damit wird im Modell die Gesamt"menge" an Energie **E** nur aufgeteilt.

Im Fall B werden die beiden Faktoren als zeitabhängige lineare Funktionen mit **feE(t) + feF(t) = 1** beschrieben. So kann modelliert werden, dass die „öffentliche Meinung" eine Zunahme der Erneuerbaren_Energien will.



5.3.3 Beschreibung des Modells durch Zustands- und Modellgleichungen

Die folgenden Zustands- und Modellgleichungen lassen sich aus dem Flussdiagramm erschließen. Das Modell wird quantifiziert, indem wieder alle Größen mit Zahlen oder auch Funktionen belegt werden.

B_neu ← B_alt + Δt * Zb; Anfangsgröße **B = 7 Milliarden**;

Δt = 1 (Interpretation: Zeittakt 1 Jahr)

E_neu ← E_alt + Δt * Ze; Anfangsgröße **E = 18 GWh**;

C_neu ← C_alt + Δt * Zc; Anfangsgröße **C =27 Mill. Tonnen**;

Zb = r * B; r = 0,01

Ze= fe * B; fe = 0,01

Zc= fc * FE; fc = 0,005

Fall A:

EE = feE * E; feE = 0,2;

FE = feF * E; feF = 1 – feE

Fall B:

EE = feE(t) * E; feE(t) = m * t; m = 0,02;

FE = feF(t) * E; feF(t) = 1 - feE(t)

Zur Bestimmung der Anfangsgrößen und der Wachstumsziffer der Erdbevölkerung sowie zur Abschätzung der Binde-Faktoren gilt das oben Gesagte, wobei aber im Fall A die Größe **feE = 20%** und im Fall B die lineare Zeit-Funktion **feE(t) = 0,02 * t** fiktiv angenommen sind. Sie hängen sehr stark von politischen Entscheidungen ab. Die hier angenommene lineare Funktion feE(t) bewirkt, dass in etwa 50 Jahren alle umgewandelte Energie aus erneuerbaren Energien stammt.

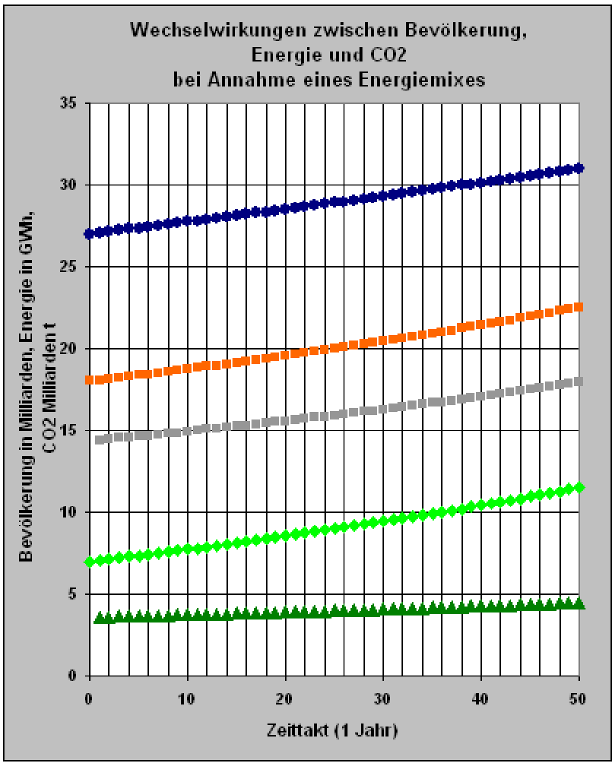
5.3.4 Programmierung der Zustands- und Modellgleichungen mit Excel;

Beide Fälle A und B werden in Excel-Tabellen programmiert. Für den Fall A wird folgend ein Ausschnitt gezeigt. In beiden Tabellen lassen sich aber alle stärker grau unterlegten Werte ändern und so ein anderes Simulationsergebnis erzeugen. Alle Werte in den Tabellen sind auf vier Stellen hinter dem Komma gerundet.

Zeit-takt	Δt	r	Zb	B in Milli-arden	fe	Ze	E ge-samt in GWh	feE	EE in GWh	feF	FE in GWh	fc	Zc	C in Milli-arden t
0	1	0,01		7	0,01		18	0,2				0,005		27
1	1	0,01	0,07	7,07	0,01	0,07	18,07	0,2	3,6	0,8	14,4	0,005	0,072	27,072
2	1	0,01	0,0707	7,1407	0,01	0,0707	18,1407	0,2	3,614	0,8	14,456	0,005	0,0723	27,1443
3	1	0,01	0,0714	7,2121	0,01	0,0714	18,2121	0,2	3,6281	0,8	14,5126	0,005	0,0726	27,2169
4	1	0,01	0,0721	7,2842	0,01	0,0721	18,2842	0,2	3,6424	0,8	14,5697	0,005	0,0728	27,2897
5	1	0,01	0,0728	7,357	0,01	0,0728	18,357	0,2	3,6568	0,8	14,6274	0,005	0,0731	27,3628
6	1	0,01	0,0736	7,4306	0,01	0,0736	18,4306	0,2	3,6714	0,8	14,6856	0,005	0,0734	27,4362
7	1	0,01	0,0743	7,5049	0,01	0,0743	18,5049	0,2	3,6861	0,8	14,7445	0,005	0,0737	27,5099
8	1	0,01	0,075	7,5799	0,01	0,075	18,5799	0,2	3,701	0,8	14,8039	0,005	0,074	27,5839
9	1	0,01	0,0758	7,6557	0,01	0,0758	18,6557	0,2	3,716	0,8	14,8639	0,005	0,0743	27,6582
10	1	0,01	0,0766	7,7323	0,01	0,0766	18,7323	0,2	3,7311	0,8	14,9246	0,005	0,0746	27,7328

5.3.5 Simulationen des Modells

Hier ein Beispiel für den Fall A; es entspricht der vorstehenden Tabelle:



blau = Kohlendioxid

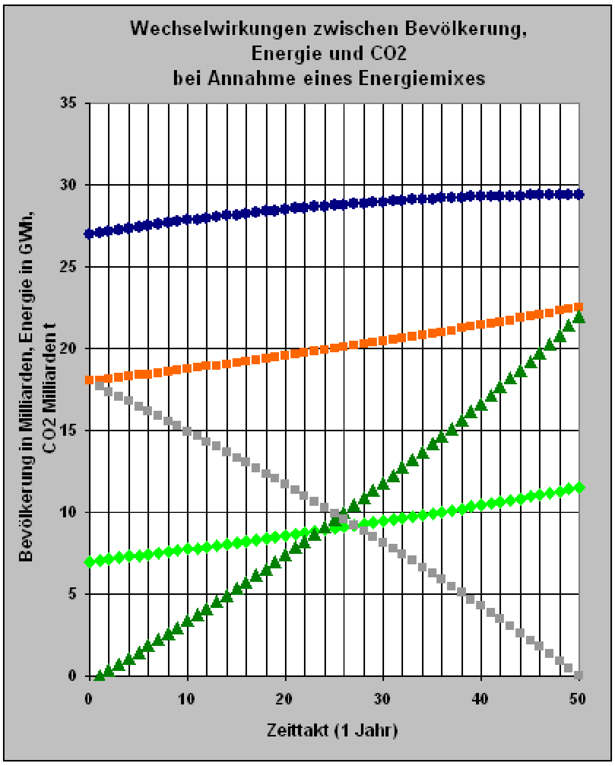
rot = Energie

grau = fossile Energie

unkelgrün = erneuerbare Energie

hellgrün = Bevölkerung

Werden nun für die Aufteilung der Gesamtenergie in Erneuerbare_Energien und Fossile_Energien zeitabhängige lineare Funktionen gewählt, so wie sie oben im Fall B beschrieben worden sind, dann erhalten wir z.B. das folgende Simulationsergebnis.**



Weitere Simulationen lassen erkennen, dass die Faktoren **fc** und **feE** sowie die lineare Funktion und **feE(t)** auf eine Abnahme bzw. Reduktion des CO2-Ausstoßes in die Atmosphäre am stärksten wirken.

5.3.6 Verhaltensbeschreibung, Interpretation, Zweck und Grenzen des Modells

In diesem Modell steigt, wie auch schon zuvor in dem einfachen Grundmodell, mit wachsender Bevölkerungszahl die Nachfrage nach bzw. der „Verbrauch" an Energie (rote Kurve).

Im Fall B nimmt aber die fossile Energie"kurve" (graue Kurve) stark ab und nähert sich in den nächsten 50 Jahren dem Wert Null.

Weil aber der Anteil an fossiler Energie an der umgewandelten Energie abnimmt, also immer mehr fossile durch erneuerbare Energien (dunkelgrüne Kurve) ersetzt werden, nimmt die Ausstoß an Kohlendioxid bzw. die Belastung der Atmosphäre mit Kohlendioxid (blaue Kurve) ab. Das zeigt das zweite Diagramm recht deutlich. Zwar wächst der Ausstoß von Kohlendioxid in die Atmosphäre immer weniger, aber er stabilisiert sich auf einem (viel zu) hohen Niveau, das nicht dem natürlichen Kreislauf des Kohlendioxids (ma0554.htm). entspricht.

Die Verhaltensbeschreibungen der beiden zuvor diskutierten Modelle enden in qualitativen

Einsichten. Und das war der **Zweck dieser Modelle**. Die Simulationsergebnisse vermitteln aber auch neue, weiterführende Fragen:

- Wie lässt sich der Kohlendioxid-Gehalt in der Atmosphäre, der stark mitverantwortlich für die Temperaturerhöhung auf der Erde ist, wieder auf ein natürliches Maß reduzieren? Hierzu siehe in MMM die Szenarien auf der Seite ma0556a.htm.
- Lassen sich mit erweiterten Modellen auch qualitative Zukunftsaussagen in der Weise gewinnen, dass begründeter gesagt werden kann, wenn „heute“ nichts passiert, dann haben unsere Kinder und Enkel ein großes Problem?

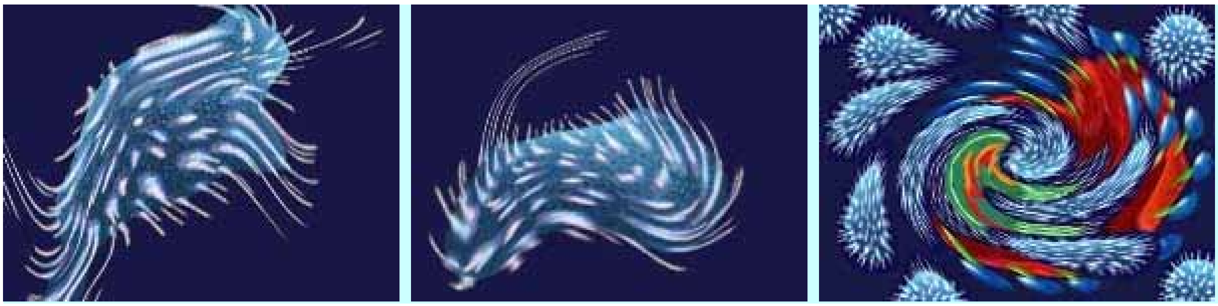
Mit diesen beiden Fragen zeigen sich wieder die **Grenzen der beiden zuvor diskutierten Modelle**. Die Modelle müssten erneut erweitert werden. Sie könnten jedoch selbstständig so weiterentwickelt werden, dass eine Reduktion des Kohlendioxids in der Atmosphäre durch eine Erhöhung von Photosynthese oder Bindung in das Modell eingebracht würden.

Siehe hierzu auch das Kapitel 7.7 „Energiebedarf der Menschheit immer noch wachsend! – Aber: humanverträgliche und klimafreundliche Energieumwandlung?“

Verweise und Links in die Lernumgebung MMM zur Anwendung der dynamischen Modellierung an weiteren Beispielen im „herkömmlichen“ Mathematik-Unterricht:

- bei der Konstruktion und Simulation der Informationsweitergabe in hierarchischen Netzen zum Zwecke der Solidarisierung gegen Gewalt (ma1118.htm)
- bei der Konstruktion und Simulation von Wechselwirkungen zwischen Wirtschaftswachstum und Arbeitsplätzen (ma1178.htm)

6. Die dynamische Modellierung in einem projektorientierten Mathematikunterricht im Kontext des realen Problems „AIDS, Grippen, SARS und andere moderne Epidemien“ (ma0620.htm)



In diesem Kapitel wird die projektorientierte Einführung in die dynamische Modellierung im Mathematikunterricht in **Klasse (8) 9 bis 11** beschrieben.

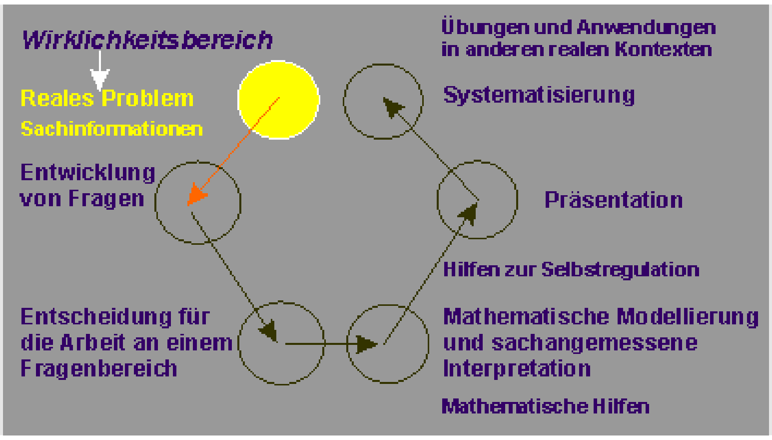
Falls im vorhergehenden Unterricht bereits einige Funktionenklassen systematisiert worden sind, ist es auch möglich, parallel zur dynamischen Modellierung ebenfalls funktional zu modellieren (Beispiel: ma1626.htm).

6.1 Einbettungen der dynamischen Modellierungsarbeiten in einen Unterrichtsablauf

Der **idealtypische Ablauf eines projektorientierten Unterrichts** ist mit didaktischen, methodischen und organisatorischen Hinweisen im **Kapitel 4.1** ausführlich dargestellt. Hier wird die dynamische Modellierung nur in aller Kürze in den Ablauf des Unterrichts eingebettet.

1. Unterrichtsstunde

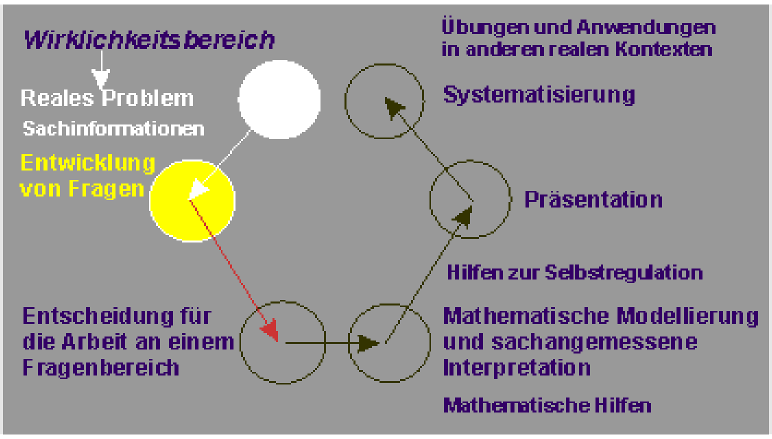
Diskussionen zum realen Problem



Die Mathematiklehrerin oder der Mathematiklehrer führt in eine Diskussion des realen Problems ein und verweist dann die Jugendlichen auf eine mögliche Bild-Diskussionen (ma0620a.htm) oder eine fast unglaubliche Geschichte zur AIDS-Problematik sowie auf Blicke auf die Problemlage viröser Epidemien oder / und Pandemien (ma0622.htm).

2. Unterrichtsstunde

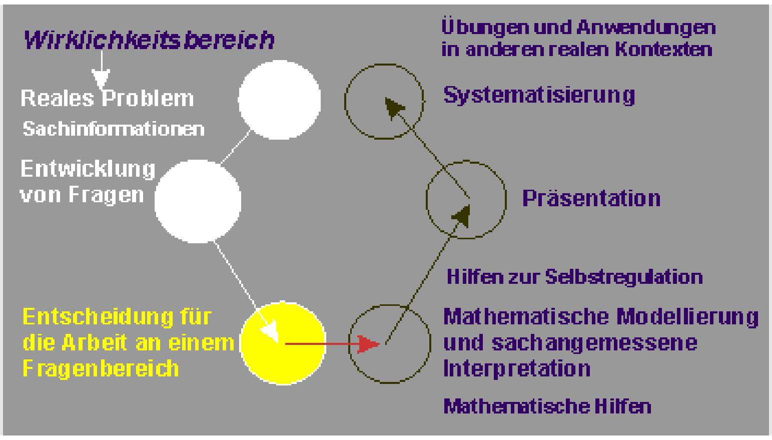
Entwicklung von Fragen



Zur Entscheidungsfindung setzen die Kleingruppen die begonnene Diskussion fort. Sie nutzen dabei die Ausführungen auf der Seite [Wie breitet sich u.a. das HI Virus aus? Mit welcher Geschwindigkeit? Und mit welcher Dynamik? ...?] (ma0623.htm)

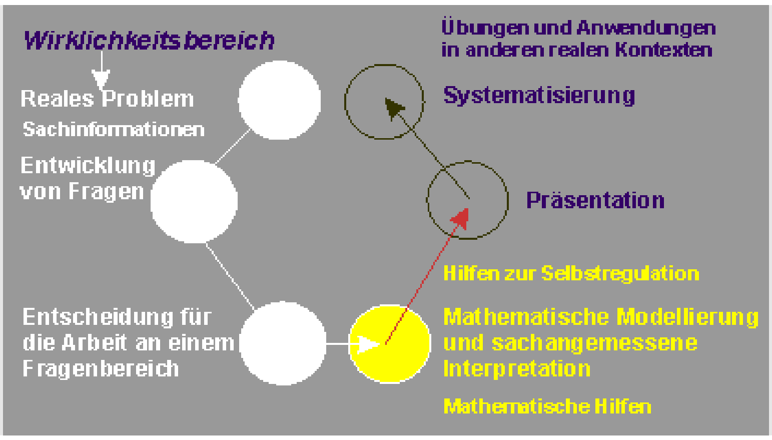
Noch 2. Unterrichtsstunde

Entscheidung der Jugendlichen für einen Fragenbereich und Bildung von „interessengleichen“ Kleingruppen



3. bis 6. Unterrichtsstunde

Modellierungen in Kleingruppen, sachangemessene Interpretation und Erstellung einer Präsentation



Die Jugendlichen entscheiden sich, was sie in den nächsten vier Mathematikstunden und auch Zuhause arbeitsteilig in ihren Kleingruppen bearbeiten möchten: Die Anforderungen sind zunehmend anspruchvoller, können aber unabhängig voneinander bearbeitet werden.

[Kleingruppe(n) 1:](ma0628.htm#Gruppe1) **Konstruiert und simuliert in einem einfachen dynamischen Modell die Ausbreitung eines Infektes** (ma0628.htm#Gruppe1)

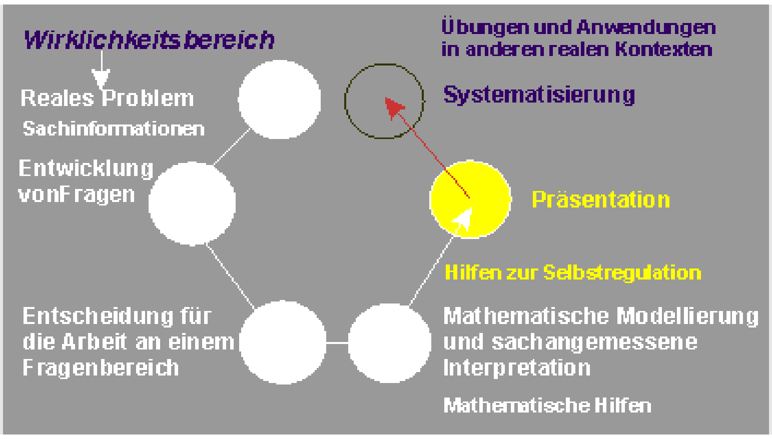
[Kleingruppe(n) 2:](ma0628.htm#Gruppe2) **Konstruiert und simuliert in einem dynamischen Modell die Ausbreitung einer Epidemie oder Pandemie** (ma0628.htm#Gruppe2)

[Kleingruppe(n) 3:](ma0628.htm#Gruppe3) **Konstruiert und simuliert in einem dynamischen Modell die Ausbreitung von Viren (u.a. von AIDS) mit Todesfällen** (ma0628.htm#Gruppe3)

Anmerkung: *Im folgenden Text wird die Arbeit aller* ***Kleingruppe(n)*** *dargestellt. Eine vollständige Lösung mit Verlinkungen auf das reale Problem sowie auf die erwerbbaren Kompetenzen und auf die interaktiven ExcelTabellen kann in MMM auf der Seite [ma1628.htm](ma1628.htm) eingesehen werden.*

7. und 8. Unterrichtsstunde

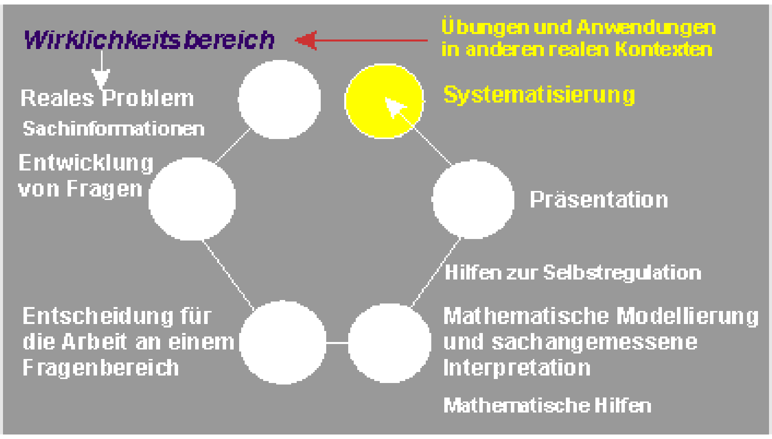
Präsentation der Ergebnisse und Diskussion der Ergebnisse im Sachzusammenhang des realen Problems



In der Präsentationsphase kommen die Lösungen aller Kleingruppen zum Zusammenwirken. Jetzt kann z.B. die Einsicht vermittelt werden, dass der Modellzweck bei der Modellentwicklung eine ganz wichtige Rolle spielt und jedes Modell seine Grenzen hat.

9. und 10. Unterrichtsstunde

Systematisierung der dynamischen Modellierung; ggf. Gegenüberstellung von funktionaler und dynamischer Modellierung



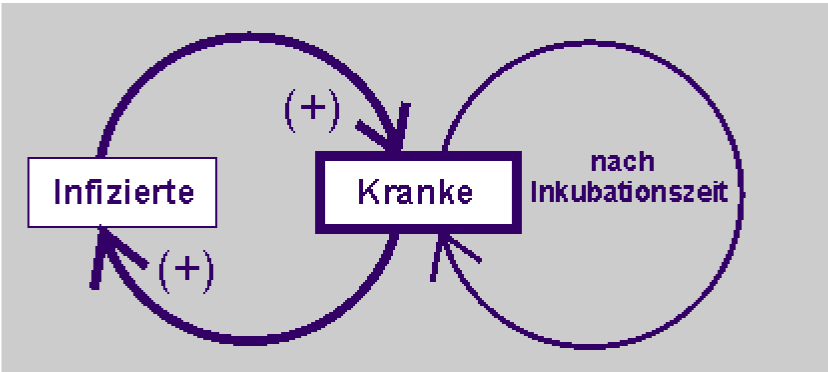
6.2 Konstruktion und Simulation eines einfachen Modells zur Ausbreitung eines Infektes

Bereits Infizierte werden nach einer gewissen Zeit (Inkubationszeit) krank und stecken dann immer wieder noch nicht Infizierte an.

6.2.1 Darstellung der Wechselwirkungen in einem Wirkungsdiagramm

Die Zahl der Kranken wirkt positiv auf die Zahl der Infizierten: Je mehr Kranke es gibt, desto mehr Menschen können infiziert werden, desto mehr Infizierte wird es geben.

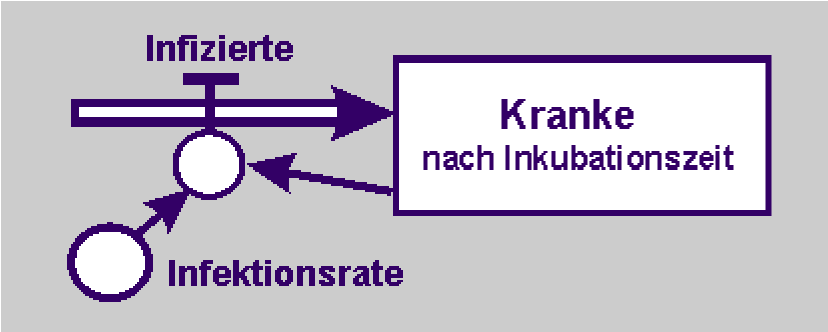
Das folgende Wirkungsdiagramm beschreibt diese Abhängigkeiten in qualitativer Form. Es wird mit dem Pluszeichen oder mit „je desto“ argumentiert.



6.2.2 Beschreibung der Dynamik in einem Flussdiagramm

Überträgt man das Wirkungsdiagramm in ein Flussdiagramm, so werden die Zusammenhänge quantifiziert: Die Zustandsgröße Kranke (**K**) ist leicht zu erkennen. Die immer wieder neu Infizierten (**I**) sind die Flussgröße. Auf sie wirken eine Infektionsrate (**r**) und die Zahl der bereits Kranken.

Die Infizierten werden zwar erst nach einer Inkubationszeit krank. Dies bleibt hier aber unbeachtet. Siehe gegebenenfalls „Ideale Modelle zur Ansteckungs- und Abklingphase eines Infekts“ in der **Lernumgebung „Mathe Überall“**.



6.2.3 Beschreibung des Modells durch Zustands- und Modellgleichungen

Die Zustands- und Modellgleichung lassen sich aus dem Flussdiagramm unter Berücksichtigung eines Zeittaktes erschließen. Alle Größen werden mit Zahlen belegt. Das Modell ist nun vollständig quantifiziert.

K_neu ← K_alt + Δt * I; Anfangsgröße: **K = 3;**

Δt = 1; (**Interpretation** des Zeittaktes = **1 Tag**

I = K * r;   r = 0,17

6.2.4 Programmierung der Zustands- und Modellgleichungen mit Excel

Die Zustands- und Modellgleichungen lassen sich in einer Excel-Tabelle programmieren. Von ihr wird nur ein Ausschnitt gezeigt. In diesem einfachen Fall können auch noch alle Werte handschriftlich oder mit dem Taschenrechner ermittelt werden.

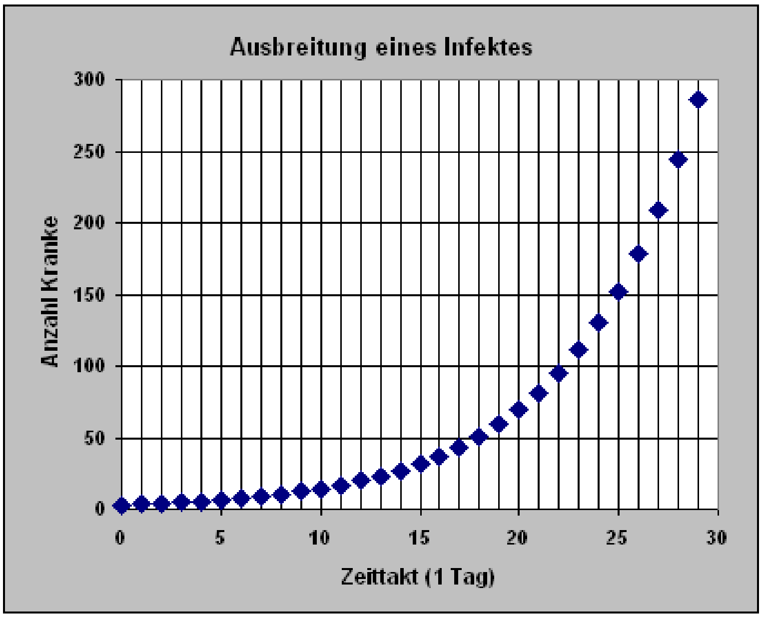
Zeittakt (1 Tag)	Δt	Infektionssrate r	Infizierte (I)	Kranke (K)
0	1	0,17		3
1	1	0,17	0,51	3,5
2	1	0,17	0,6	4,1
3	1	0,17	0,7	4,8
4	1	0,17	0,82	5,6
5	1	0,17	0,95	6,6
6	1	0,17	1,12	7,7
7	1	0,17	1,31	9
8	1	0,17	1,53	10,5
9	1	0,17	1,79	12,3
10	1	0,17	2,09	14,4

6.2.5 Simulationen des Modells

Das folgende Simulationsergebnis passt zu den Werten der Tabelle. In dieser Tabelle lassen sich aber alle stärker grau unterlegten Werte verändern. Wird die Anfangsgröße und / oder die Infektionsrate verändert, so ergibt sich ein anderes Simulationsergebnis.

In einer Schule könnte durch Abzählen der Kranken zu Beginn eines Tages und zu Beginn des folgenden Tages die Ansteckungsrate experimentell bestimmt werden (Zahl der angesteckten Kinder geteilt durch die Zahl aller Kinder der Schule).

Im Fall einer sehr ansteckenden Infektion gibt es eine Meldepflicht bei der Gesundheitsbehörde. Auch sie berechnet die Infektionsrate auf der Grundlage der Meldungen bei der Behörde.



6.2.6 Verhaltensbeschreibung, Interpretation, Zweck und Grenzen des Modells

Wird die Infektionsrate erhöht, so ergibt sich bei gleich bleibender Anfangsgröße schnell ein völlig anderes Bild. Erst recht steigt die Zahl der Kranken rasend schnell, wenn auch noch die Anfangsgröße erhöht wird. Eine Infektion breitet sich exponentiell aus (siehe hierzu die zweite Grafik in der ExcelDateien/Mappe1628a.htm).

Die Simulationen verdeutlichen, warum hoch ansteckende Infektionen meldepflichtig sind. Und diese Erkenntnis wird auch schon durch das vorstehend ausgeführte einfache Modell vermittelt. Denn die Gesundheitsbehörde kann dann ggf. einen Kindergarten oder auch eine Schule für die Zeit der hohen Ansteckungsgefahr schließen.

Das Modell ist aber zur Beschreibung einer Epidemie nicht geeignet. Denn es beschreibt lediglich die Ausbreitung(sgeschwindigkeit) der Infektion.

Und noch eine Anmerkung: *Die Struktur dieses Modells ist dieselbe wie die des Wachstums ei-*

ner Bevölkerung, wenn mit einer Wachstumsrate modelliert wird. Die Struktur ist auch dieselbe mit der das Wachstum von Spinnmilben im Fall A dargestellt wird. Also ist auch das Grundverhalten immer dasselbe. Deshalb kann dieses einfache Wachstumsmodell als ein ***Prototyp für unbegrenztes Wachstum*** *angesehen werden.*

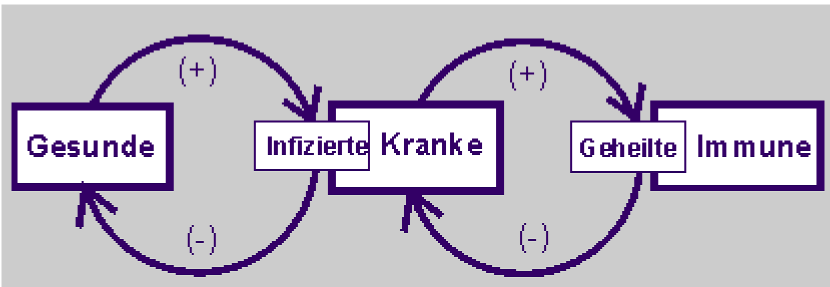
6.3 Konstruktion und Simulation eines dynamischen Modells zur Ausbreitung einer Epidemie oder Pandemie

Modelliert man den Fall einer Epidemie, so muss man betrachten, wie sich die Anzahl von Gesunden, Kranken und schließlich Immunen im Laufe der Zeit ändert.

6.3.1 Beschreibung der Ausbreitung einer Epidemie in einem Wirkungsdiagramm

Gesunde werden infiziert und dann krank. Kranke erholen sich, werden geheilt und sind dann für eine Zeit immun gegenüber der infektiösen Krankheit. Diese beiden Wirkungen sind positiv.

Aber je mehr Kranke es gibt, desto weniger Gesunde wird es geben. Die Anzahl der Kranken wirkt also negativ auf die Anzahl der Gesunden. Entsprechend wirkt die Anzahl der Immunen negativ auf die Anzahl der Kranken.

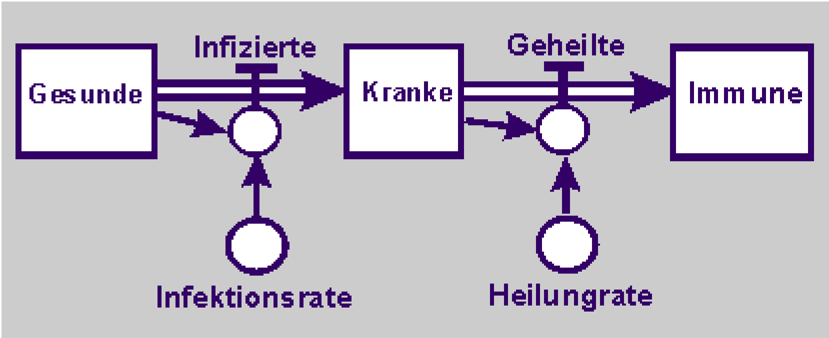


Das Wirkungsdiagramm beschreibt wiederum die Zusammenhänge qualitativ. Es wird gefragt, Was wirkt auf Was und wie. Argumentiert wird mit dem Plus- oder Minuszeichen oder mit „je desto“.

6.3.2 Beschreibung der Dynamik in einem Flussdiagramm

Bei einer Quantifizierung des Wirkungsdiagramms in das folgende Flussdiagramm sind die Gesunden **(Ges)**, Kranken **(Kra)** und Immunen **(Imm)** die Zustandsgrößen. Sie sind quasi hintereinander geschaltet. Die Zahlen folgen auseinander.

Die Zahl der Infizierten **(In)** und die der immer wieder Geheilten **(Ge)** sind die Flussgrößen. Auf die Flussgröße der Infizierten wirken die Infektionsrate **(ir)** und der Zahl der Gesunden. Entsprechend wirken auf die Zahl der Geheilten die Heilungsrate **(hr)** und die Zahl der Kranken. Die Heilungsrate lässt sich in einer Schule in derselben Weise wie die Infektionsrate experimentell bestimmen.



6.3.3 Beschreibung des Modells durch Zustands- und Modellgleichungen

Die Zustands- und Modellgleichungen lassen sich aus dem Flussdiagramm erschließen. In diesen Gleichungen wird das Modell quantifiziert. Alle Größen werden mit Zahlen belegt und Δt wird interpretiert.

Ges_neu ←Ges_alt + Δt * (-In); Anfangsgröße: **Ges = 5000**;

Δt = 1; (Interpretation: Zeittakt: **1 Tag** oder 1 Woche ...)

Kra_neu ← Kra_alt + Δt * (In - Ge); Anfangsgröße: **Kra = 0** ;

Imm_neu ← Imm_alt + Δt * (Ge); Anfangsgröße: **Imm = 0**;

In = Ges * ir; ir = 0,1;

Ge = Kra * hr; hr = 0,08

Zur Bestimmung der Raten siehe auch in MMM unter Sach-Informationen die Seite zu Grippen, SARS und andere viröse Krankheiten (ma0625.htm). Im vorstehenden Modell werden die Infektions- und Heilungsrate als nahezu gleich angenommen. Die Heilungsrate „hinkt" im obigen Modell aber etwas hinter der Infektionsrate her.

Allgemein gilt, dass die Infektions- und Heilungsrate sowohl vom Typ der Epidemie abhängen als auch voneinander abhängen können. Es ist z.B. ein Unterschied, ob sich eine normale Grippe oder SARS ausbreitet.

6.3.4 Programmierung der Zustands- und Modellgleichungen mit Excel

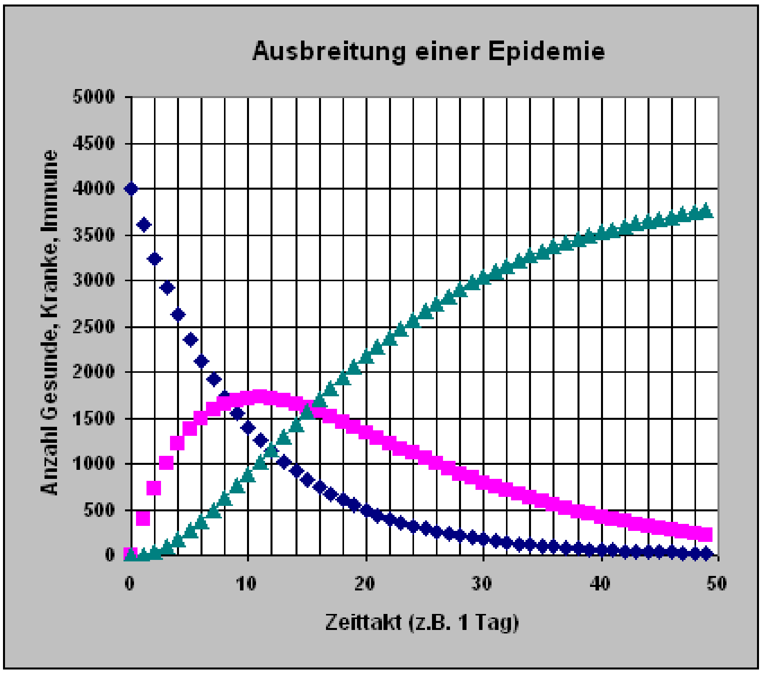
Die Zustands- und Modellgleichungen lassen sich in einer Excel-Tabelle programmieren. Von ihr wird hier nur ein Ausschnitt gezeigt. Die Werte können zwar immer noch selbstständig berechnet werden, aber es wird zunehmend zeitaufwändiger, insbesondere dann, wenn bei jeder Simulation alle Werte der Tabelle neu berechnet werden müssen.

Zeittakt z.B. 1 Tag	Δt	ir	In	Ges	hr	Ge	Kra	Imm
0	1	0,1		4000	0,08		0	0
1	1	0,1	400	3600	0,08	0	400	0
2	1	0,1	360	3240	0,08	32	728	32
3	1	0,1	324	2916	0,08	58	994	90
4	1	0,1	292	2624	0,08	80	1206	170
5	1	0,1	262	2362	0,08	96	1372	266
6	1	0,1	236	2126	0,08	110	1498	376
7	1	0,1	213	1913	0,08	120	1591	496

Die Zahl der Infizierten und Geheilten ist jeweils auf null Stellen hinter dem Komma gerundet. Mathematisch ist das ein Fehler, interpretativ gibt es aber nur ganze Menschen! Natürlich könnte man auch nur die Ergebnisse für Ges, Kra und Imm auf null Stellen hinter dem Komma runden.

6.3.5 Simulationen des Modells

Das folgende Simulationsergebnis passt zu den Werten der obigen Tabelle. In der Tabelle lassen sich aber alle stärker grau unterlegten Werte ändern. Geschieht dies, so ergibt sich jeweils ein anderes (ggf. auch nicht mehr interpretierbares) Simulationsergebnis.



Blaue Raute = Gesunde; violettes Quadrat = Kranke; grünes Dreieck = Immune

6.3.6 Verhaltensbeschreibung, Interpretation, Zweck und Grenzen des Modells

In den ersten 30 Tagen werden in diesem simulierten Fall nicht alle Erkrankten (violett) geheilt und dann immun (grün). Was geschieht aber nach 50 oder 60 oder 70 Tagen bei niedriger Infektionsrate und höherer Heilungsrate? Oder was geschieht, wenn die Anfangswerte geändert werden?

In diesem dynamischen Modell der Ausbreitung einer Epidemie nimmt die Zahl der Gesunden in der ersten Zeit schnell ab und nähert sich dann langsam nahezu der Null. Alle werden krank. Die Zahl der Kranken steigt schnell auf einen Höchstwert, nicht ganz halb so groß, wie der Anfangswert der Gesunden. Dann sinkt die Zahl der Kranken - langsamer werdend - auch gegen Null ab. Die Zahl der Immunen steigt zunächst schnell an und strebt dann langsamer werdend einem Höchstwert zu, der dem Anfangswert der Gesunden entspricht. Schließlich sind alle Kranken immun geworden, also wieder gesund.

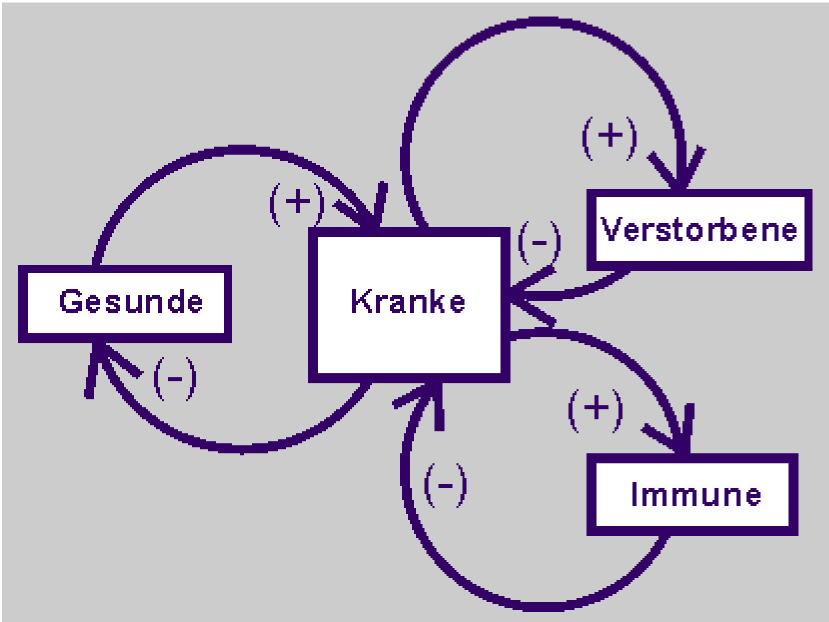
Die Modellierung endet also - nach einer quantitativen Phase - mit einer Verhaltensbeschreibung, die wieder qualitativ ist. Das ist in diesem Fall aber der Zweck des Modells. Er vermittelt die grundlegende (qualitative) Einsicht: So verläuft generell eine Epidemie! Sollen quantitative Prognosen erstellt werden, müssen die Infektions- und Heilungsrate zum Typ der Epidemie passend ermittelt werden.

In obigem Modell erkranken alle Gesunden und werden schließlich immun. Das muss aber so nicht sein. Es gibt z.B. auch Ausbreitungen von Viren, die zum Tod führen. Hier liegt also eine Grenze des Modells.

6.4 Konstruktion und Simulation eines dynamischen Modells zur Ausbreitung von Viren (u.a. von AIDS) mit Todesfällen

6.4.1 Beschreibung der Ausbreitung von Viren mit Todesfällen in einem Wirkungsdiagramm

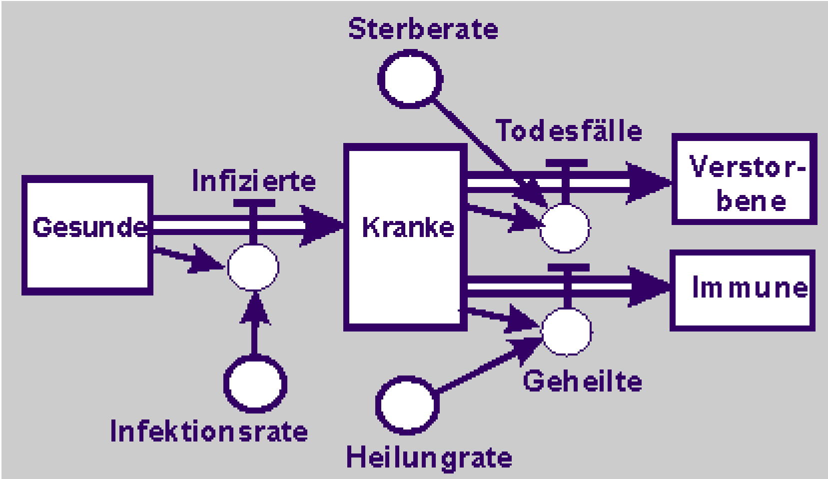
Im folgenden dynamischen Modell wird die Ausbreitung eines Virus modelliert, der alle Menschen infizieren kann und der nach Heilung zur Immunität oder auch zum Tod führen kann.



Gesunde werden mit Viren infiziert und dann krank. Eine Zahl von Kranken stirbt, eine andere wird geheilt und dann immun. Die zunehmende Zahl von Kranken wirkt negativ auf die Zahl der Gesunden zurück. Je mehr Menschen mit einem Virus infiziert werden, desto weniger sind gesund. Und sowohl die Zahl der Immunen als auch die Zahl der Verstorbenen wirkt negativ auf die Zahl der Kranken zurück. Je mehr Menschen sterben oder immun werden, desto weniger sind krank.

6.4.2 Beschreibung der Dynamik in einem Flussdiagramm

Bei der Übertragung des Wirkungsdiagramms in das folgende Flussdiagramm sind die Gesunden (**Ges**), Kranken (**Kra**), Verstorbenen (**Ver**) und Immunen (**Imm**) die Zustandsgrößen. Die Zahl der Infizierten (**In**) ergibt sich aus der Zahl der Gesunden über die Infektionsrate (**ir**). Aus der Zahl der Kranken ergibt sich über die Sterberate (**sr**) die Zahl der Todesfälle (**To**) und über die Heilungsrate (**hr**)die Zahl der Immunen (**Imm**).



6.4.3 Beschreibung des Modells durch Zustands- und Modellgleichungen

Die folgenden Zustands- und Modellgleichungen quantifizieren das Modell endgültig.

Ges_neu ← Ges_alt + Δt * (-In); Anfangsgröße: **Ges = 5000**;

Δt = 1 (Interpretation: **Zeittakt 1 Tag**, 1 Monat, 1 Jahr ...)

Kra_neu ← Kra_alt + Δt * (In - (Ge + To)); Anfangsgröße: **Kra = 0**;

Imm_neu ← Imm_alt + Δt * (Ge); Anfangsgröße: **Imm = 0**;

Ver_neu ← Ver_alt + Δt * (To); Anfangsgröße: **Ver = 0**;

In = Ges * ir ; ir = 0,1;

Ge = Kra * hr; hr = 0,08;

To = Kra * sr; sr = 0,01

Zur Bestimmung der Raten siehe Kapitel 6.2.5 aber auch in MMM die Sach-Informationen zu Grippen, SARS und andere viröse Krankheiten (ma0625.htm).

Im vorstehenden Modell werden die Infektions- und Heilungsrate als nahezu gleich angenommen. Die Heilungsrate „hinkt" aber im obigen Modell etwas hinter der Infektionsrate her. Die Sterberate ist gering gehalten, sie „hinkt" damit erheblich hinter der Heilungsrate her.

Allgemein hängen die Raten vom Virus-Typ ab. Es ist z.B. ein Unterschied, ob sich eine normale Grippe oder AIDS ausbreitet.

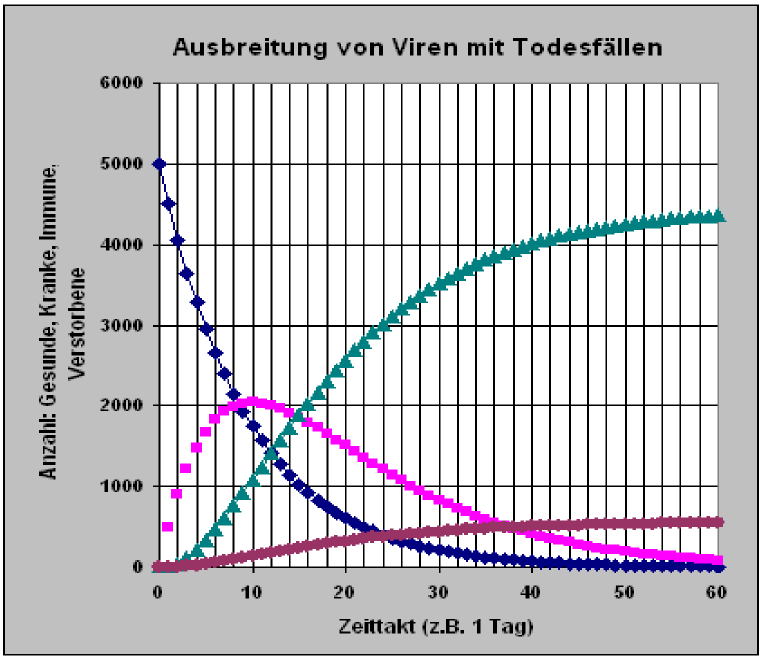
6.4.4 Programmierung der Zustands- und Modellgleichungen mit Excel

Zeittakt 1 Tag	Δt	ir	In	Ges	hr	sr	Ge	To	Kra	Imm	Ver
0	1	0,1		5000	0,08	0,01			0	0	0
1	1	0,1	500	4500	0,08	0,01	0	0	500	0	0
2	1	0,1	450	4050	0,08	0,01	40	5	905	40	5
3	1	0,1	405	3645	0,08	0,01	72	9	1229	112	14
4	1	0,1	365	3280	0,08	0,01	98	12	1484	210	26
5	1	0,1	328	2952	0,08	0,01	119	15	1678	329	41
6	1	0,1	295	2657	0,08	0,01	134	17	1822	463	58
7	1	0,1	266	2391	0,08	0,01	146	18	1924	609	76
8	1	0,1	239	2152	0,08	0,01	154	19	1990	763	95
9	1	0,1	215	1937	0,08	0,01	159	20	2026	922	115

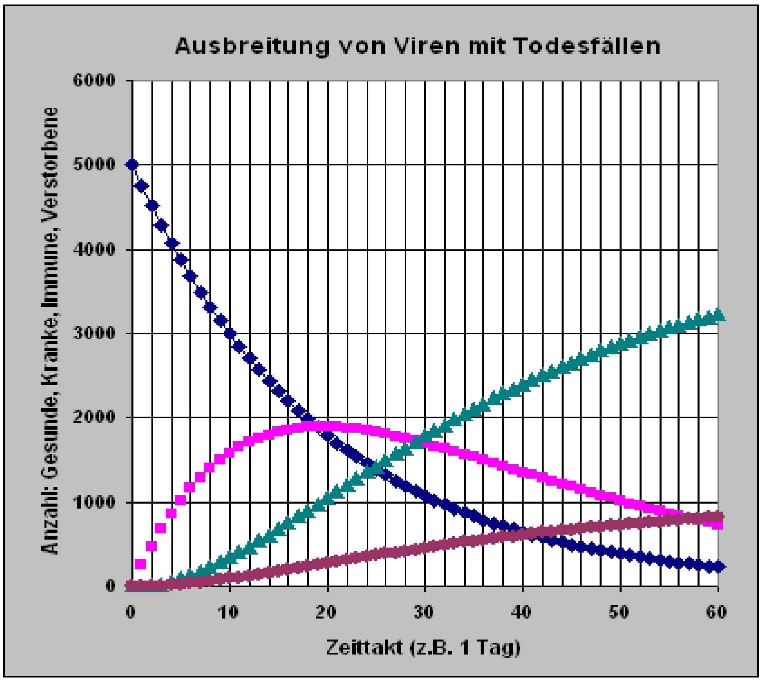
Die Zahlen der Infizierten, Geheilten und Todesfälle sind jeweils auf null Stellen hinter dem Komma gerundet. Mathematisch ist das ein Fehler, aber interpretativ gibt es nur ganze Menschen! Natürlich könnte man auch hier nur die Ergebnisse für Ges, Kra, Imm und Ver auf null Stellen hinter dem Komma runden.

6.4.5 Simulationen des Modells

Das folgende Simulationsergebnis passt zu den Werten der Tabelle.

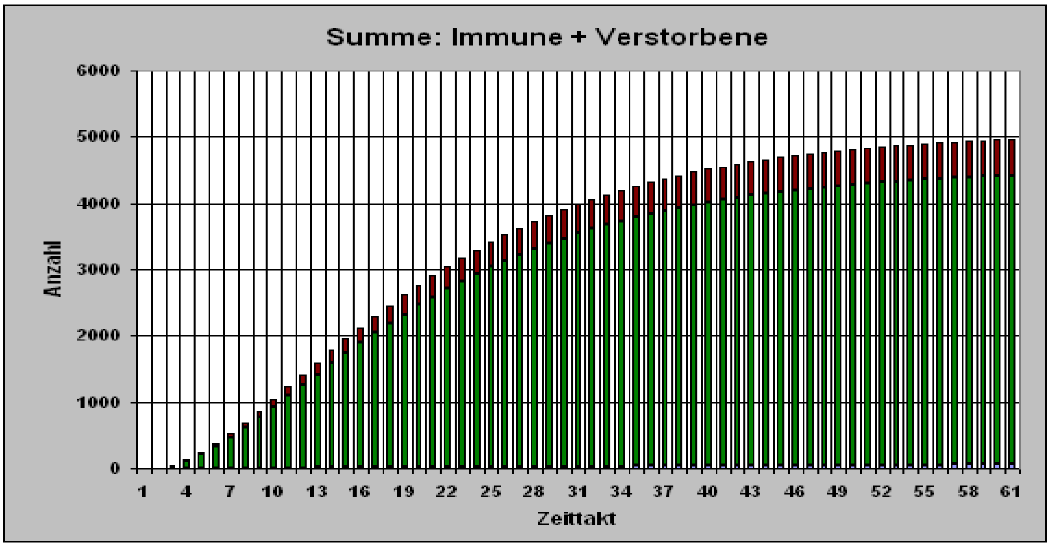


Im folgenden Simulationsergebnis sind die Infektionsrate **(ir = 0,05**) und Heilungsrate **(hr = 0,04)** halb so groß wie in der ersten Simulation. Alle anderen Größen und auch die Interpretation des Zeittaktes werden beibehalten.



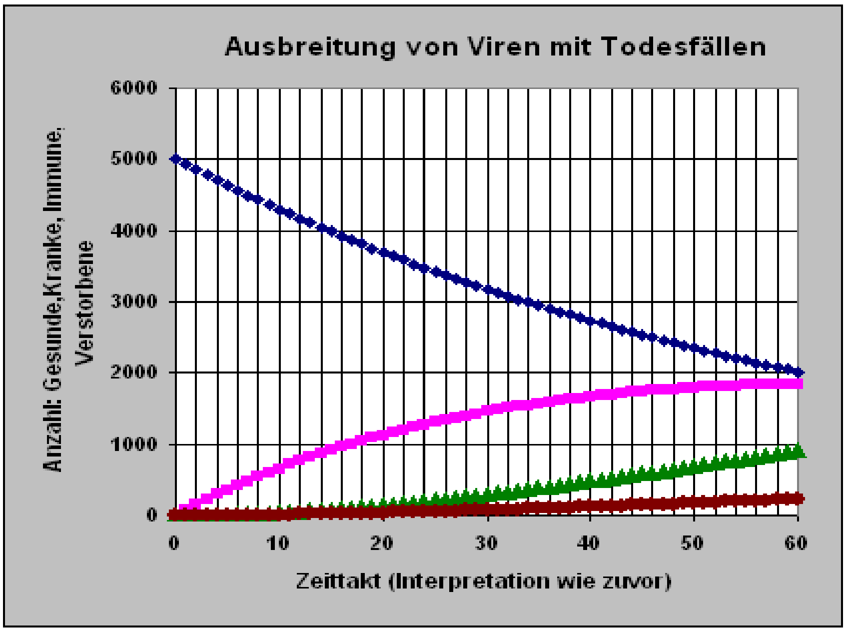
6.4.6 Verhaltensbeschreibung, Interpretation, Zweck und Grenzen des Modells

Die Zahl der Gesunden nimmt in der ersten Zeit schnell ab und nähert sich dann langsam immer mehr der Null. Alle Gesunden werden krank. Die Zahl der Kranken steigt schnell auf einen Höchstwert und sinkt dann - langsamer werdend - auch gegen Null ab. Die Summe aus Immunen und Verstorbenen nähert sich (in einer logistischen Kurve) der Anfangsgröße der Gesunden.



Wird **Δt auf 0,3** verkleinert und werden alle anderen Werte wie zuvor beibehalten, so zieht sich der beschriebene Prozess über einen längeren Zeitraum hin, **wenn die Interpretation** des

Zeittaktes **Δt = 0,3 = 1Tag beibehalten wird.**



Die Modellierung endet also - nach einer quantitativen Phase - mit einer qualitativen Verhaltensbeschreibung. Das ist in diesem Fall aber auch der Zweck des Modells. Es vermittelt eine grundlegende (qualitative) Einsicht aber auch neue, weiterführende Fragen!

Nach einer gewissen Zeitdauer haben wir in den obigen Simulationsergebnissen gleich viel Gesunde und Kranke. Diese Zeitdauern sind aber z.B. bei AIDS in Europa unrealistisch. Daher muss bei der Modellierung einer HIV-Infektion neben der Infektions-, Heilungs- und Sterberate auch der Zeittakt berücksichtigt werden. Der Zeittakt gestattet eine Modellierung, die den Prozess verlangsamt, wie es das letzte Diagramm zeigt.

Und auch die Raten hängen nicht nur vom Typ der Epidemie ab, sondern auch davon ab, in wie weit die jeweilige Bevölkerung „aufgeklärt" ist. Die Raten für AIDS sind z.B. in Afrika und Deutschland sehr unterschiedlich. Hier zeigen sich erneut die Grenzen des Modells. Sie können und sollten selbsttätig mit der Untersuchung von Szenarien überschritten werden.

Eine Analyse der AIDS-Fälle (ma0624.htm#Ausbreitung) in unterschiedlichen Ländern zeigt, dass sich das HI-Virus in einigen afrikanischen Ländern nahezu ungehemmt ausbreiten kann. Das aber bedeutet eine Vergrößerung der Infektionsrate. Und daraus, dass in diesen Ländern die teuren Medikamente gegen AIDS kaum bezahlbar sind, folgt eine Vergrößerung der Sterberate.

Die Bedeutung der vorstehenden Simulationsergebnisse für die Welt-Gesellschaft liegt also darin, dass sowohl eine Aufklärung als auch ein sicherer Schutz gegen die Ausbreitung des HI-Virus notwendig sind. Rote Beete (ma0620a.htm#RoteBeete) helfen nicht!

7. Skizzen für selbstreguliertes Forschen mit dynamischer Modellierung – Projektthema: Wachstum, Wachstum ... über alles!?

Vorbemerkungen:

Es wird vorausgesetzt, dass die Lernumgebung MMM bekannt ist und im Unterricht bereits mehrfach funktional, dynamisch und auch statistisch modelliert worden ist. Und somit einige Jugendlichen bereits in der Lage sind, auch „ohne Noten, Klavier zu spielen."

Der Ablauf des Projektes entspricht dem Unterrichtsablauf, der in Kapitel 4.1 beschrieben worden ist. Er wird daher nicht beschrieben.

In dieser Schrift werden nur dynamische Modellierungen skizziert. Funktionale Modellierungen zum selben Projektthema sind in der Schrift „Funktionale Modellierung" dargestellt. Sie sollten aber in diesem Projekt unbedingt auch vorkommen, damit das selbstorganisierte Forschen sowohl analysierende als auch konstruktiv-simulierende Überlegungen zum Thema umfasst und somit auch ihre wechselseitige Bedeutung zur Einsicht in Komplexitäten deutlich wird. Und immer spielen bei Wachstumsproblemen auch menschliche Einstellungen eine Rolle. Sie könnten durch eine Befragung (statistische Betrachtung) deutlich werden.

7.1 Diskussion des Projektthemas und Entscheidung für interessenbezogene dynamische Modellierungen an Teilproblemen

Die Jugendlichen setzen sich zunächst in Adhoc-Kleingruppen mit der Problematik des Wachstums auf der Grundlage der folgenden realen Probleme auseinander und entscheiden sich sodann für die Arbeit an einem der folgenden möglichen Wachstumsprobleme:

Beispiele für mögliche Wachstumsprobleme	Bezüge: u.a. Reales Problem / Anforderungsseite
Weltbevölkerung und Welternährung – grenzenlos wachsend?	Bevölkerungsexplosion; oder? & Seite ma0158.htm
Arbeitsplatzangebot und Bruttosozialprodukt (BIP) – immer mehr und immer höher?	Arbeit für alle!?! & Seite ma0178.htm
Kapital, Konsum und Investition – immer noch gieriger? oder Volkseinkommen in Abhängigkeit von Konsum und Investition – immer noch höher!?	Wachstum, Wachstum - Boom ohne Grenzen? & Seite ma0228.htm
Ausreichende Ernährung durch nachhaltige Flächenentwicklung? Überlegungen am Beispiel der Subsahara-Zone	Wohlstand für alle! Vision oder Möglichkeit? & Seite ma0328.htm sowie Extreme Armut - „Hunger“ lebenslänglich?
Energiebedarf der Menschheit immer noch wachsend! – Aber: humanverträgliche und klimafreundliche Energieumwandlung?	Energie“Hunger“: .... ? & Seite ma0538.htm sowie Klimawandel auf der Erde? & Seite ma0558.htm
Selbstvergiftungen an Müll oder nachhaltiges Müllmanagement?	Auftürmende Müllberge: Ersticken wir im ... Müll? & Seite ma0948.htm

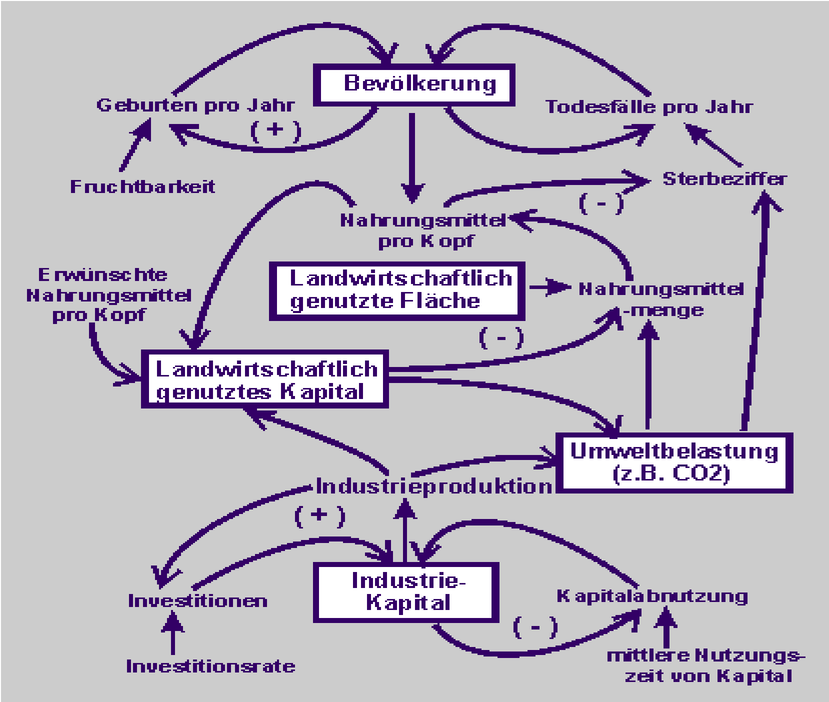
Haben sich die Jugendlichen auf der Grundlage ihrer Interessen für die Arbeit an einem Thema entschieden, organisieren sie sich in arbeitsteiligen Kleingruppen, in denen sie in der Schule und auch zu Hause **selbstreguliert** (d.h. selbstständig, selbstorganisiert und selbstverantwortet) **mittels dynamischer (und auch funktionaler) Modellierung forschen und arbeiten wollen**. In der **Präsentationsphase**, die auf die Modellierungsphase folgt, tragen alle Kleingruppen ihre Ergebnisse so vor, dass sie bezogen auf das Projektthema diskutiert, interpretiert und bewertet werden können. Insbesondere sollte diskutiert und bewertet werden, ob es denn ein grenzenloses Wachstum geben kann oder ob wir Menschen zum Wachstum verdammt (ma0226.htm) sind.

7.2 Weltbevölkerung und Welternährung – grenzenlos wachsend?

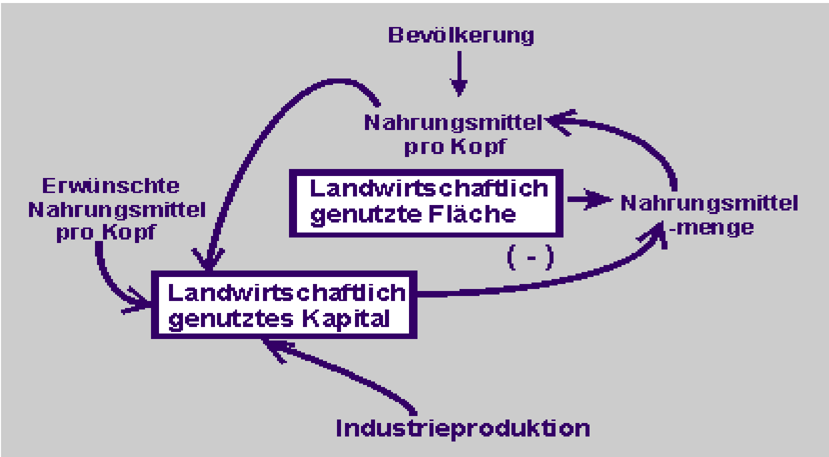
Einerseits wächst die Bevölkerung in den so genannten Entwicklungsländern „explosiv“. Andererseits nimmt in den „reichen“ Industrienationen die Bevölkerungszahl ständig ab. In diesem Kapitel fragen wir uns aber, ob es für eine wachsende Erdbevölkerung immerfort und überall eine hinreichende Ernährung geben kann?

7.2.1 Beschreibung von Zusammenhängen in Wirkungsdiagrammen

Das komplexe Wirkungsgefüge von „Bevölkerung, Kapital, Landwirtschaft und Umweltverschmutzung“ (S. 83) im Bericht „Die Grenzen des Wachstums“ an den Club of Rome zeigt eine Vielfalt von Zusammenhängen (siehe in MMM die Seite ma7655.htm).



Das Wirkungsgefüge ist aber so komplex, dass zunächst nur das Subsystem „Landwirtschaft und Kapital“ untersucht wird. Es ist im folgenden Wirkungsdiagramm dargestellt.



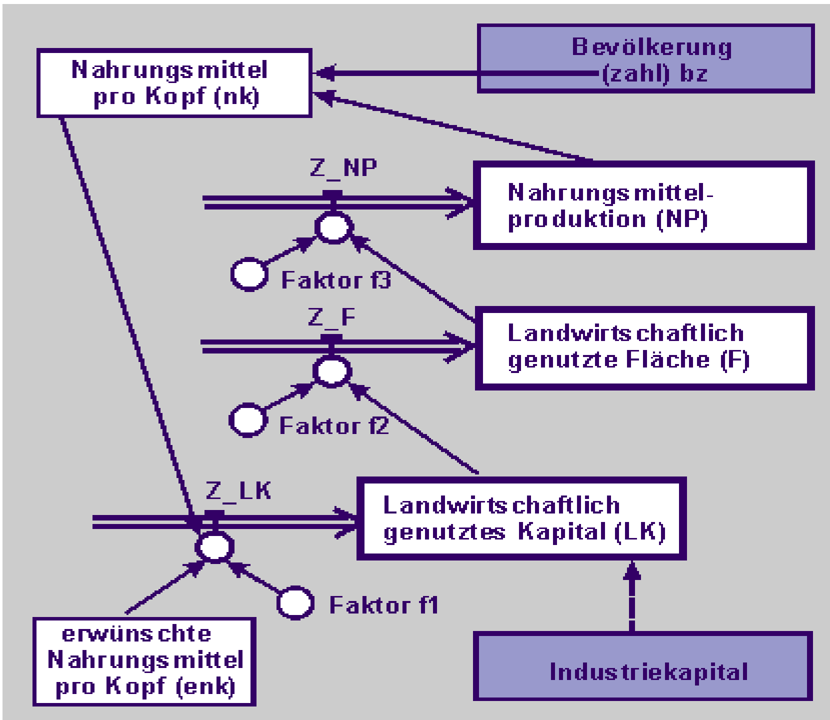
Im Bericht an den Club of Rome wird festgestellt (S. 85): „Wenn die Nahrungsmittelmenge pro Kopf unter das von der Bevölkerung verlangte Maß fällt, entsteht eine Tendenz, das landwirtschaftliche Kapital zu erhöhen, so dass die Nahrungsmittelerzeugung wieder gesteigert werden kann und zu einer Erhöhung der Nahrungsmittelmenge pro Kopf führt“.

7.2.2 Beschreibung der Dynamik in einem Flussdiagramm

Die Bevölkerungszahl (**bz**) nehmen wir in unserem Modell zunächst als eine konstante Größe an. Das Kapital für die Industrieproduktion übernehmen wir als Anfangsgröße in die Zustandsgröße „Landwirtschaftlich genutztes Kapital (**LK**)“. Weitere Zustandsgrößen sind die „Landwirtschaftlich genutzte Fläche (**F**)“ und die „Nahrungsmittelproduktion (**NP**)“.

Mit dem eingesetzten Kapital wächst die nutzbare Fläche und mit der nutzbaren Fläche wächst die produzierte Nahrungsmenge. Entsprechend gibt es also die drei Flussgrößen: Zunahme_landwirtschaftliches Kapital (**Z_LK**), Zunahme_landwirtschaftlich genutzte Fläche (**Z_F**) und Zunahme_Nahrungsmittelproduktion (**Z_NP**). Auf diese wirken die Anpassungsfaktor **f1, f2** und **f3**.

Die Nahrungsmenge pro Kopf (**nk**) und die erwünschte Nahrungsmenge pro Kopf (**enk**) erzeugen einen Rückkopplungskreis über das eingesetzte Kapital.



Dem Bericht an den Club of Rome wird ebenfalls entnommen: „Wichtigste Grundlage für die Nahrungsmittelproduktion ist bebaubares Land. Nach neueren **Untersuchungsergebnissen gibt es auf der Erde etwa 3,2 Milliarden Hektar prinzipiell landwirtschaftlich nutzbare Flächen**. Die Hälfte davon, und zwar die ertragreichere, leicht bebaubare Hälfte, wird bereits landwirtschaftlich genutzt. Für die andere Hälfte sind hohe Kapitalsummen für Bewässerung, Rodung, Düngung und ähnliche Maßnahmen der Urbarmachung erforderlich, wenn man sie ebenfalls nutzen will. **Die Durchschnittskosten ... belaufen sich auf etwa 1150 Dollar pro Hektar (ha)**“ ... (S. 39) ... „**Jeder Mensch benötigt bei der gegenwärtigen Produktionsrate etwa 0,4 ha zu seiner Ernährung.**“ (S. 40). *(Hervorhebungen sind durch die Verfasser dieser Schrift erfolgt.)*

Auf der Grundlage dieser Feststellungen und weiterer Sachinformationen aus dem realen Problem „Bevölkerungsexplosion“ (ma0150.htm) lassen sich die Anfangsgrößen für **LK, F und NP** berechnen und auch die Faktoren **f1, f2 und f3** experimentell bestimmen bzw. abschätzen.

Der Wert für **enk** lässt sich wie folgt berechnen: **enk** = **0,26 Tonnen Weizen pro Jahr pro Kopf** entsprechen 0,72 kg pro Kopf pro Tag. Diese Menge entspricht dem Normalbedarf von rund 3000 kcal pro Kopf pro Tag, bei 1g Kohlenhydrate = 4,2 kcal (siehe hierzu: Potentielle Energie in der Nahrung**;** ma2775.htm). Die wirkliche Nahrungsmenge **nk** ist die **gelbe Linie in den folgenden Simulationen**.

7.2.3 Beschreibung des Modells durch Zustands- und weitere Modellgleichungen

Aus dem Flussdiagramm werden die folgenden Zustands- und Modellgleichungen abstrahiert, sowie die Anfangsgrößen und Konstanten und Faktoren mit Größen oder Zahlen belegt.

LK_neu ← LK_alt + Δt * Z_LK; Anfangsgröße **LK = 0,08 Billionen €;**

F_neu ← F_alt + Δt * Z_F; Anfangsgröße **F = 1,5 Mill. ha**;

NP_neu ← NP_alt + Δt * Z_NP; Anfangsgröße **NP = 1,5 Bill. Tonnen**;

Δt = 0,005; (Interpretation **1 Zeittakt = 1 Jahr**)

Z_LK = (enk - nk) * f1; f1 = 25;

enk = 0,26 Tonnen Weizen pro Jahr pro Kopf; **nk = NP/bz; bz = 6,8** Milliarden

Z_F = LK * f2; f2 = 25

Z_NP = F * f3; f3 = 2

Anmerkungen zur Interpretation des Zeittaktes

Die Randbedingungen des Systems – oben fett gedruckt – belegen und begrenzen das mathematische Gleichungssystem mit relativ festen Größen. Sollen sie in der schrittweise berechneten Lösung des Gleichungssystems repräsentiert werden und interpretierbar sein, so wird bei den gegebenen Randbedingungen innerhalb gewisser Grenzen ein Δt = 0,005 simulativ-experimentell als sinnvoll erzwungen. Doch die Zeitachse im Zeittakt der schrittweise berechneten Lösung bliebe dabei immer noch frei von einer Maßeinheit. ***Nachträglich erlauben die obigen Randbedingungen eine Interpretation des Zeittaktes als 1 Jahr.***

Natürlich ist diese Interpretation – auch unter den gegebenen Randbedingungen - nicht die *einzig mögliche. Bei Änderung der Faktoren f1, f2 und f3 (also von speziellen dimensionslosen Randbedingungen) sind auch andere Werte für Δt simulativ experimentell zu finden. Immer bleibt es aber wichtig, dass die Zeitachse bei quantitativen Aussagen so zu interpretieren ist, dass die wichtigen Randbedingungen im Diagramm wiedererkennbar sind.*

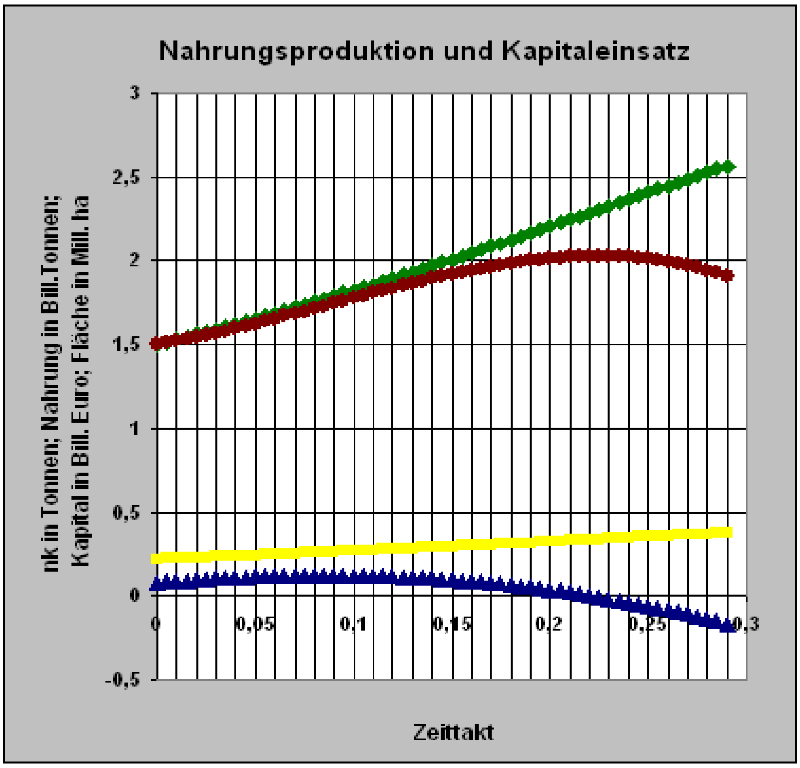
Siehe hierzu auch die Ausführungen im Kapitel 3.3 auf den Seiten 40ff.

7.2.4 Programmierung der Modellgleichungen in einer Excel-Tabelle

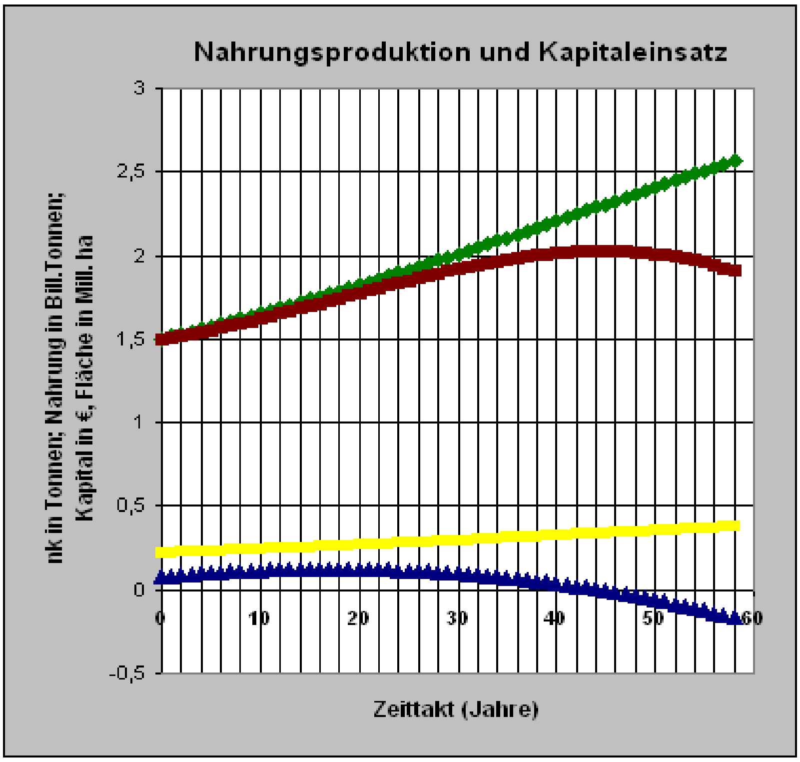
Von der Excel-Tabelle wird hier nur ein Ausschnitt gezeigt. Es gibt insgesamt 58 Rechenschritte. Die Werte sind auf vier Stellen hinter dem Komma aufgerundet.

Zeit	Zeit im					Ton-nen	Mil-liar-den		Bill. Tonnen	Ton-nen		Bill. Euro		Mill. Hektar
Tage	Zeit-takt	Δt	f1	f2	f3	enk	bz	Z_NP	NP	nk	Z_LK	LK	Z_F	F
0	0	0,005	25	25	2	0,26	6,8		1,5	0,2206		0,08		1,5
1	0,005	0,005	25	25	2	0,26	6,8	3	1,515	0,2228	0,985	0,0849	2	1,51
2	0,01	0,005	25	25	2	0,26	6,8	3,02	1,5301	0,225	0,93	0,0896	2,1225	1,5206
3	0,015	0,005	25	25	2	0,26	6,8	3,0412	1,5453	0,2273	0,875	0,094	2,24	1,5318
4	0,02	0,005	25	25	2	0,26	6,8	3,0636	1,5606	0,2295	0,8175	0,0981	2,35	1,5436
5	0,025	0,005	25	25	2	0,26	6,8	3,0872	1,576	0,2318	0,7625	0,1019	2,4525	1,5559
6	0,03	0,005	25	25	2	0,26	6,8	3,1118	1,5916	0,2341	0,705	0,1054	2,5475	1,5686
7	0,035	0,005	25	25	2	0,26	6,8	3,1372	1,6073	0,2364	0,6475	0,1086	2,635	1,5818
8	0,04	0,005	25	25	2	0,26	6,8	3,1636	1,6231	0,2387	0,59	0,1116	2,715	1,5954
9	0,045	0,005	25	25	2	0,26	6,8	3,1908	1,6391	0,241	0,5325	0,1143	2,79	1,6094
10	0,05	0,005	25	25	2	0,26	6,8	3,2188	1,6552	0,2434	0,475	0,1167	2,8575	1,6237
11	0,055	0,005	25	25	2	0,26	6,8	3,2474	1,6714	0,2458	0,415	0,1188	2,9175	1,6383
12	0,06	0,005	25	25	2	0,26	6,8	3,2766	1,6878	0,2482	0,355	0,1206	2,97	1,6532
13	0,065	0,005	25	25	2	0,26	6,8	3,3064	1,7043	0,2506	0,295	0,1221	3,015	1,6683
14	0,07	0,005	25	25	2	0,26	6,8	3,3366	1,721	0,2531	0,235	0,1233	3,0525	1,6836
15	0,075	0,005	25	25	2	0,26	6,8	3,3672	1,7378	0,2556	0,1725	0,1242	3,0825	1,699

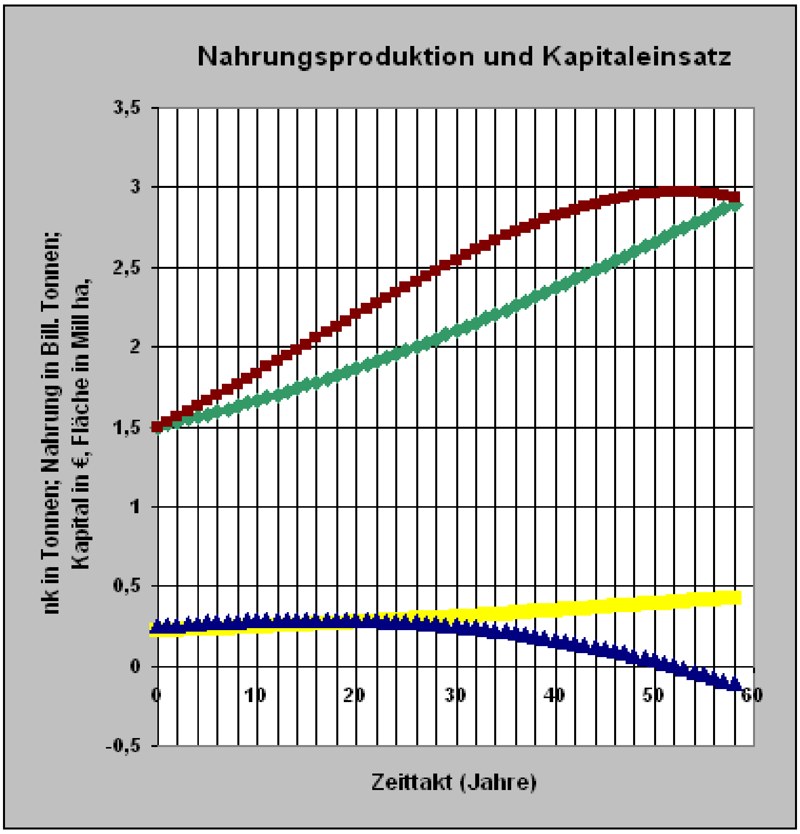
7.2.5 Simulationen des Modells

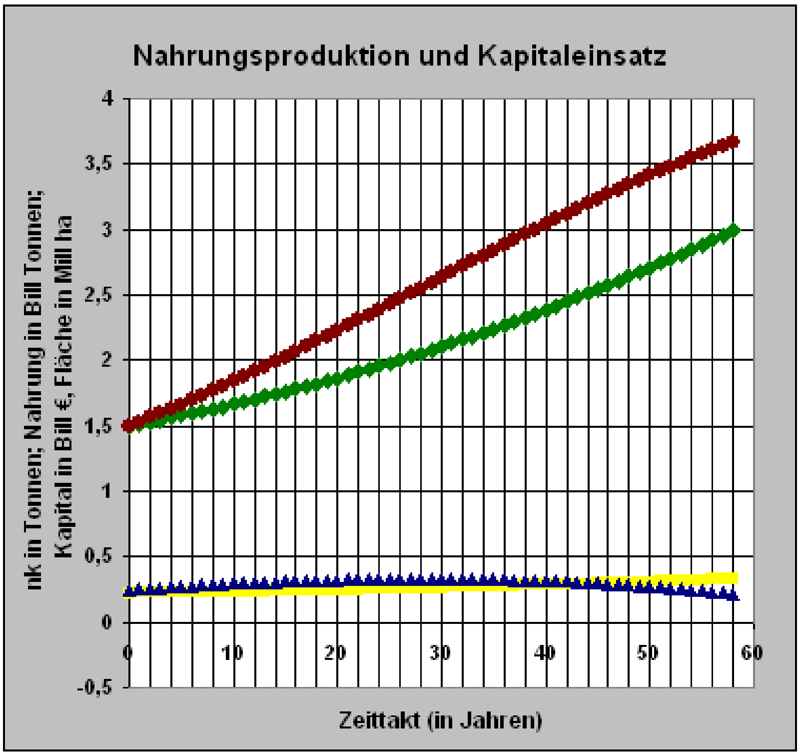


Im vorstehenden Diagramm ist die Zeitachse im dimensionslosen Zeittakt, im nachfolgenden in der Dimension Jahr geeicht.



Werden alle Werte beibehalten, aber der Kapitaleinsatz auf **Lk = 0,25** Billionen Euro erhöht, dann ergibt sich das folgende Simulationsergebnis.





In der letzten, vorstehenden Simulation wird angenommen, dass sich die Bevölkerungszahl stetig erhöht. Dabei wird von einer mittleren Variante in der Bevölkerungsprognose (ma0154.htm) ausgegangen: In 40 Jahren erhöht sich die Bevölkerungszahl von 6,8 Milliarden auf 8,6 Milliarden. Das entspricht einem linearen Anstieg von 0,04. Dieser Anstieg wird in die Spalte bz einprogrammiert.

7.2.6 Verhaltensbeschreibung, Interpretation, Zweck und Grenzen des Modells

Mit zunehmend mehr eingesetztem Kapital (siehe zweite Simulation) nimmt die landwirtschaftlich nutzbare Fläche und ebenso die Nahrungsproduktion zu. Nähert sich die wirklich nutzbare Nahrungsmenge (pro Kopf) der gewünschten Nahrungsmenge (pro Kopf) an, so nimmt der Kapitaleinsatz ab und zeitverzögert auch die bewirtschaftete Fläche.

Aus der zweiten Simulation ergibt sich weiter, dass bei einem Kapitaleinsatz von LK = 0,25 Billionen Euro in etwa 30 Jahren bereits alle Menschen genügend Nahrung hätten. Ab da sinkt dann der Kapitaleinsatz, und auch die urbar gemachte Fläche nimmt weniger schnell zu, nähert sich einem Maximum und fällt dann ab.

Bei steigender Bevölkerung (dritte Simulation) wird erst sehr viel später erreicht, dass alle Menschen genügend Nahrung haben. Die maximale Fläche, die urbar gemacht werden kann, wird erreicht. Der Kapitaleinsatz bleibt nahezu erhalten und auch die Nahrungsproduktion bleibt zwar dieselbe, aber alles muss auf sehr viel mehr Menschen aufgeteilt werden.

Genau diese qualitativen Feststellungen könnten der Zweck dieses Modells sein. Der Zweck ist hier also eine Formulierung von möglichen Visionen und kein Vorhersagemodell, es sei denn, es wird wahrgenommen, **dass das Problem einer hinreichenden Ernährung aller Menschen nicht alleine über die urbar gemachte Fläche gelöst werden kann**. Aber dieser Zweck beschreibt gleichzeitig auch die Grenzen des Modells. Zu fragen ist, ob mittels Gentechnik (siehe reales Problem: Gen- und biotechnische Evolution: Mehr Chancen als Risiken?**;** ma0930.htm), die heute zwar noch auf eine erhebliche Ablehnung stößt, die Nahrungsmenge erneut erhöht werden kann. Ob also über Neue Technologien der Lebensstandard gesteigert werden kann.

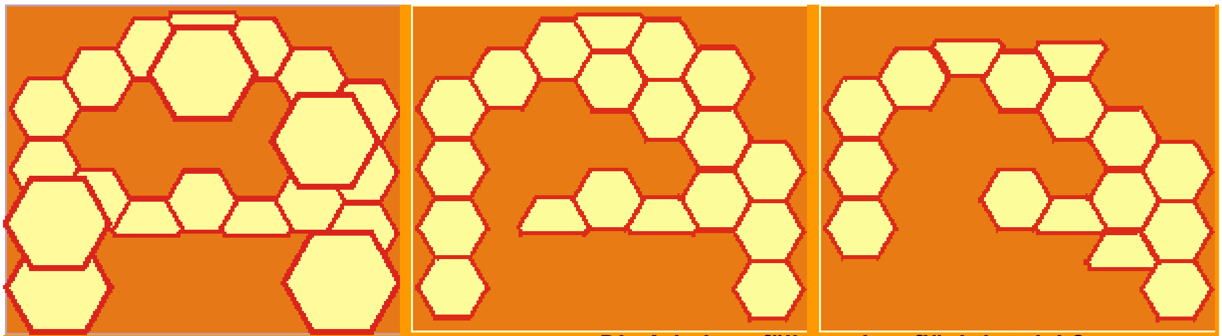
Zur Reflexion eines „organischen Wachstums“ siehe in MMM auch die Seite „Modellskizzen zu ‚Grenzen des Wachstums’ und ‚Jenseits der Grenzen des Wachstums“ (ma7655.htm).

Eine vollständige Lösung zur dynamischen Modellierung mit Verlinkungen auf das reale Problem sowie auf die erwerbbaren Kompetenzen und auf die interaktiven ExcelTabellen kann in MMM auf Seite ma1158.htm eingesehen werden.

Eine mögliche Lösung zur funktionalen Modellierung ebenfalls mit Verlinkungen auf das reale Problem sowie auf die erwerbbaren Kompetenzen und auf die interaktiven ExcelTabellen kann in MMM auf Seite ma1156.htm eingesehen werden oder in der Schrift „Funktionale Modellierung“ im Kapitel 7 nachgelesen werden.

7.3 Arbeitsplatzangebot und Bruttosozialprodukt – Immer mehr und immer höher?

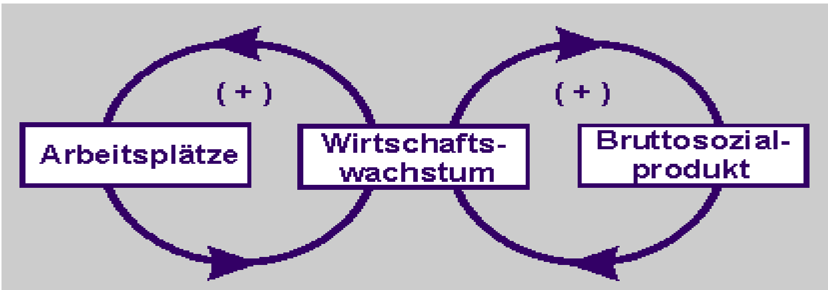
Nimmt in den Industriestaaten die (bezahlte) Erwerbsarbeit radikal ab? Kann es überhaupt eine neue Vollbeschäftigung für alle geben? Gibt es Arbeit für alle? Wenn ja, wie ist das möglich? Denn: Arbeit zu haben, trägt für die meisten Menschen zur Lebensqualität bei. Denn für viele Menschen schafft Arbeit einen Sinn in ihrem Leben. Wer Arbeit hat, der fühlt sich besser!



Die Arbeit zerfällt. und verflüchtigt sich?

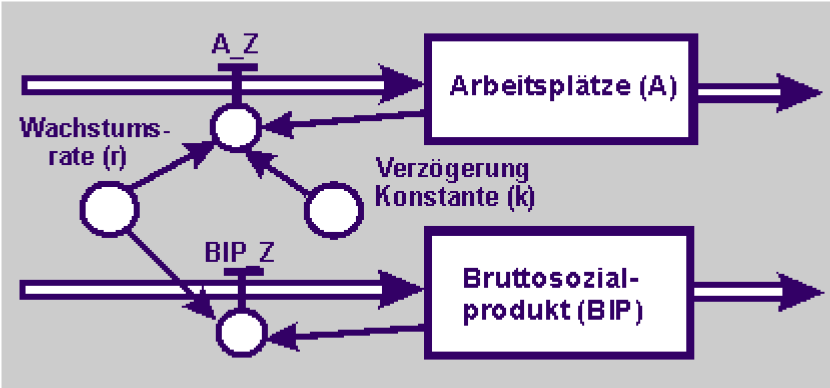
7.3.1 Beschreibung eines Zusammenhanges im Wirkungsdiagramm

Es wird angenommen, dass sowohl die Zahl der Arbeitsplätze als auch das Bruttosozialprodukt vom Wirtschaftswachstum abhängen. Je größer das Wirtschaftswachstum ist, umso größer wird sowohl die Zahl der Arbeitsplätze als auch das Bruttosozialprodukt sein. So wird es mindestens in den Medien und von den Politikern immer wieder formuliert.



7.3.2 Beschreibung der Dynamik in einem Flussdiagramm

Auf die Zustandsgröße Arbeitsplätze (**A**) wirkt die Flussgröße Arbeitplatz_Zunahme (**A_Z**). Auf die Zustandsgröße Bruttosozialprodukt (**BIP**) wirkt die Flussgröße BIP_Zunahme (**BIP_Z**). Sowohl auf A_Z als auch auf BIP_Z wirkt einerseits dieselbe Wachstumsrate (**r**) als auch andererseits rückgekoppelt die bereits vorhandene Zahl an Arbeitsplätzen und das bereits erwirkte BIP. Aber das Arbeitsplatzangebot wird gegenüber dem BIP verzögert verändert (**k**). So entsteht aus dem Wirkungsdiagramm das folgende Flussdiagramm.



7.3.3 Beschreibung des Modells durch Zustands- und weitere Modellgleichungen

A_neu ← A_alt + Δt * A_Z; Anfangsgröße **A = 3900** Zehn-Tausend,

BIP_neu ← BIP_alt + Δt * BIP_Z; Anfangsgröße **BIP = 2900** Milliarden,

Δt = 0,25

(**Interpretationsmöglichkeiten**: 1 Zeittakt = 1 Monat oder 1 Quartal oder 1 Jahr)[5]

A_Z = (r - k) * A; r =0,025

BIP_Z = r * BIP; k = 0,02

Die Anfangsgrößen für Arbeitsplätze und BIP entsprechen den momentanen Zahlen in Deutschland. Die Größen sind aber in unterschiedlichen Maßen angegeben, damit sie im gleichen Diagramm darstellbar und vergleichbar sind. Die Konstante k wird experimentell bestimmt und zwar so, dass bei einer länger stabil anhaltenden Wachstumsrate von etwas über 2% die Zahl der Arbeitsplätze ansteigt, so wie es die „Wirtschaft" regelmäßig in den Medien veröffentlicht. Siehe „Warum muss die Wirtschaft ständig wachsen?... (ma0223.htm).

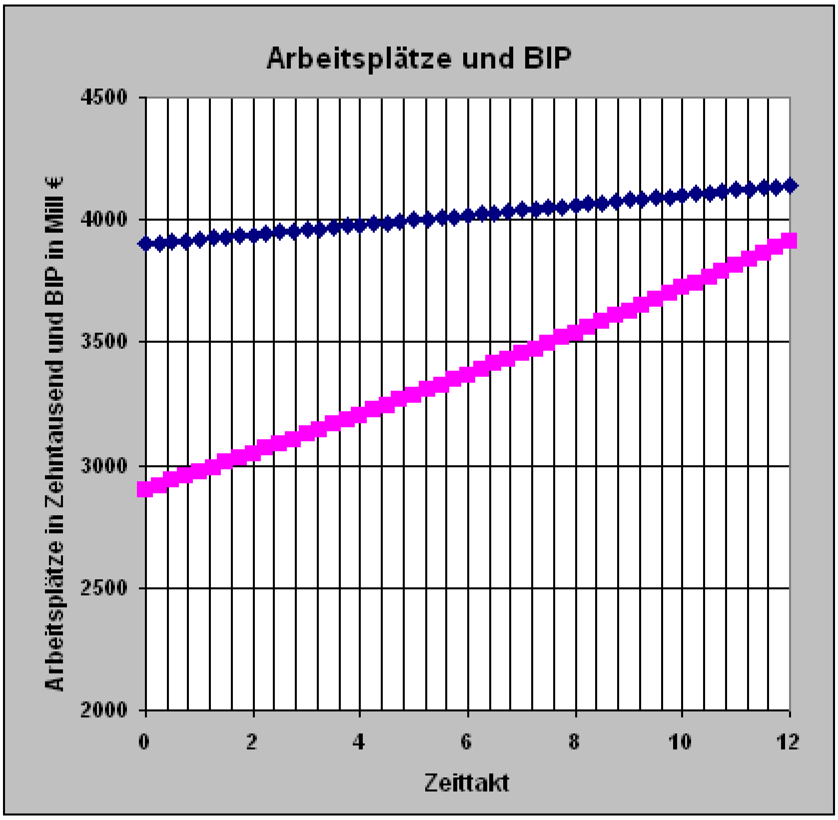
7.3.4 Programmierung der Modellgleichungen in einer Excel-Tabelle

Die berechneten Werte im Ausschnitt aus der folgenden Excel-Tabelle sind auf 2 Stellen hinter dem Komma gerundet.

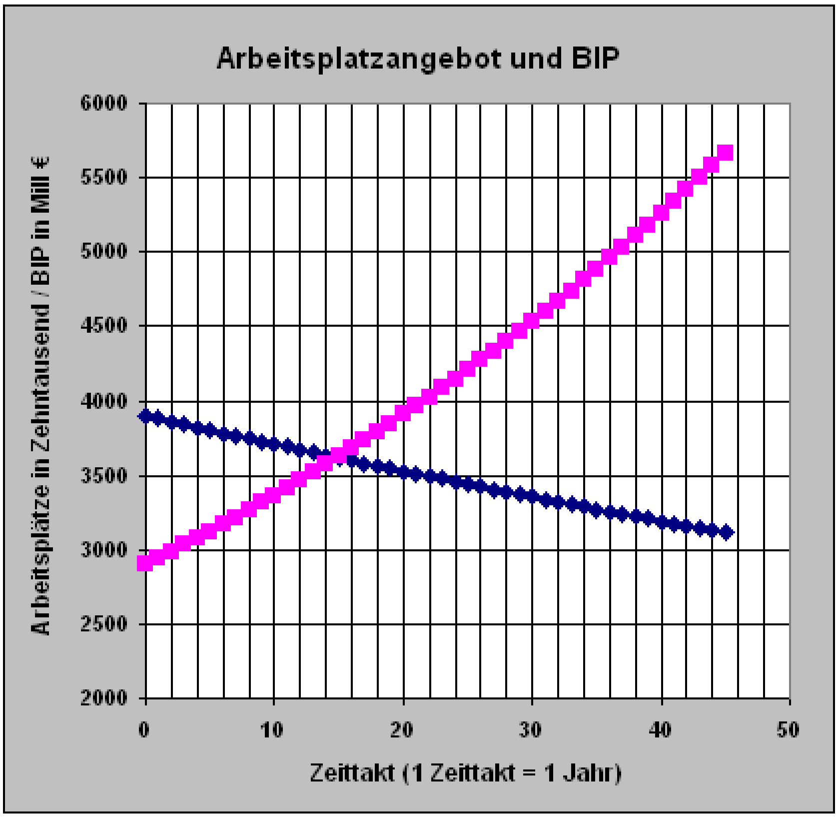
5 Zur Interpretation des Zeittaktes siehe die Ausführungen in Kapitel 3.3. Eine Interpretation ist notwendig, wenn eine quantitative Aussage gemacht werden soll.

Zeittakt	Δt	r	k	A_Z	BIP_Z	**A** in 10Tausend	**BIP** in Milliarden €
0	0,25	0,025	0,02			3900	2900
0,25	0,25	0,025	0,02	19,5	72,5	3904,88	2918,13
0,5	0,25	0,025	0,02	19,52	72,95	3909,76	2936,37
0,75	0,25	0,025	0,02	19,55	73,41	3914,65	2954,72
1	0,25	0,025	0,02	19,57	73,87	3919,54	2973,19
1,25	0,25	0,025	0,02	19,6	74,33	3924,44	2991,77
1,5	0,25	0,025	0,02	19,62	74,79	3929,35	3010,47
1,75	0,25	0,025	0,02	19,65	75,26	3934,26	3029,29
2	0,25	0,025	0,02	19,67	75,73	3939,18	3048,22
2,25	0,25	0,025	0,02	19,7	76,21	3944,11	3067,27
2,5	0,25	0,025	0,02	19,72	76,68	3949,04	3086,44
2,75	0,25	0,025	0,02	19,75	77,16	3953,98	3105,73
3	0,25	0,025	0,02	19,77	77,64	3958,92	3125,14

7.3.5 Simulationen des Modells



Das vorstehende Simulationsergebnis entspricht den Werten in der obigen Tabelle. Bei der folgenden Simulation wird Δt = 1 gesetzt und die Wachstumsrate wird mit r =0,015 kleiner als 2% angenommen. Der Zeittakt ist mit 1 Jahr interpretiert.



Weitere Simulationsergebnisse lassen sich durch Veränderung von Delta t, den Anfangsgrößen, der Wachstumsrate (auch negative) und der Konstante erzeugen.

Anmerkung: *Die Wachstumsrate kann auch für einzelne Zeitabschnitte unterschiedlich, gewissermaßen als Tabellenfunktion eingegeben werden. Oder die Wachstumsrate kann als Funktion der Zeit eingegeben werden, die z.B. als lineare Approximation aus statistischen Daten gewonnen worden ist (funktionale Modellierung). Natürlich ergeben sich dann völlig andere Simulationsergebnisse als die obigen.*

7.3.6 Verhaltensbeschreibung, Interpretation, Zweck und Grenzen des Modells

Die Wachstumsrate wird in beiden Fällen konstant und durchgehend mit derselben Prozentzahl angenommen. Im zweiten Fall wird die Rate aber auf 1,5 % verkleinert, also kleiner als 2% angenommen. 2% wird als notwendig für das Wachsen von Arbeitsplätzen von der „Wirtschaft“ angenommen.

Steigt das BIP (lila Kurve), so kann es sowohl sein, dass die Zahl der Arbeitsplätze steigt, als auch sein, dass ihre Zahl sinkt. Sinkt die Wachstumsrate unter 2%, so sinkt im obigen Modell auch die Zahl der Arbeitsplätze.

Je kleiner die Wachstumsrate ist, umso stärker sinkt die Zahl der Arbeitsplätze. Ist die Wachstumsrate negativ, so stürzt die Zahl der Arbeitsplätze radikal ab. Ist die Wachstumsrate erheblich über 2%, so nimmt auch die Zahl der Arbeitsplätze erheblich zu.

Genau diese qualitativen Feststellungen können der Zweck dieses Modells sein. Somit beschreibt dieser Zweck aber auch gleichzeitig die Grenzen des Modells, die in zwei Richtungen durch weitere Modellierungen „aufgehoben" werden könnten.

Zum einen stellt sich die Frage, ob es bei dauerhaft hohem Wirtschaftswachstum überhaupt noch genügend arbeitsfähige Menschen (bezogen auf eine Weltregion) gibt, die in Arbeit gebracht werden könnten. Und das ist sicher von Land zu Land verschieden.

Zum anderen ist in Zukunft aber wohl eher damit zu rechnen, dass die Wachstumsraten der Wirtschaft nicht mehr so üppig sind, wie sie in der Vergangenheit waren. Dann stellt sich aber die berechtigte Frage, wie sich das BIP und die Anzahl der Arbeitsplätze möglichst weitgehend entkoppeln lassen.

Im ersten Erweiterungsmodell müsste das obige Modell in einen dynamischen Zusammenhang mit dem Bevölkerungswachstum gebracht werden (siehe in MMM die Hilfeseite ma7660.htm). Im zweiten Fall ginge es darum, **„solidarische Arbeitsmodelle"** zu konstruieren, in denen auch der Begriff von Arbeit überdacht werden müsste. Hierzu siehe in MMM die Seite: Arbeit ist genügend vorhanden - bei neuen solidarischen Arbeitsmodellen (ma0176.htm). **Literatur**: u.a. Orio Giarini, Patrick Liedtke: Wie wir arbeiten werden – Ein Bericht an den Club of Rome, Campe Verlag, 1997.

Eine vollständigere Lösung mit Verlinkungen auf das reale Problem sowie auf die erwerbbaren Kompetenzen und auf die interaktiven ExcelTabellen kann in MMM auf Seite ma1178.htm eingesehen werden. Eine mögliche Lösung zur funktionalen Modellierung ebenfalls mit Verlinkungen auf das reale Problem sowie auf die erwerbbaren Kompetenzen und auf die interaktiven ExcelTabellen kann in MMM auf Seite ma1176.htm eingesehen werden oder in der Schrift „Funktionale Modellierung" im Kapitel 7 nachgelesen werden.

7.4 Kapital, Konsum und Investition – immer noch gieriger?

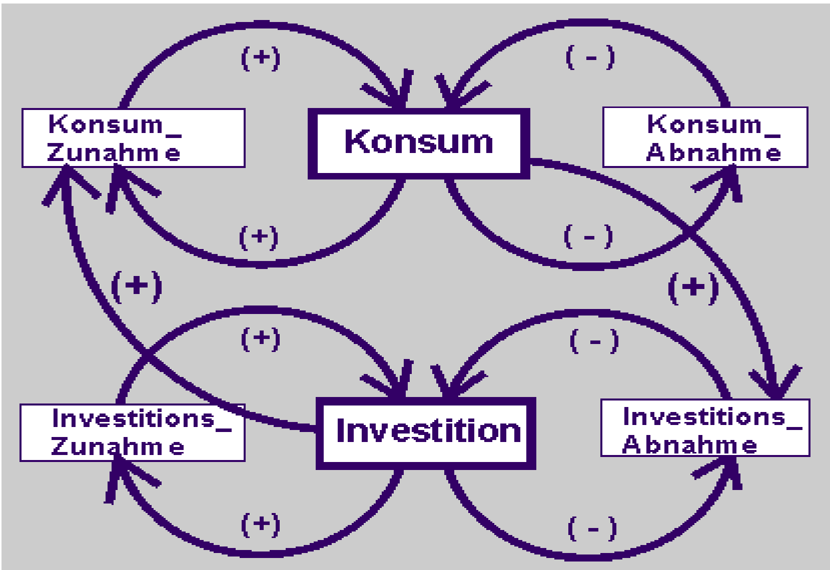
Es gibt kaum eine Nachrichtensendung, in der nicht von einem notwendigen Wachstum der Wirtschaft und des Industrie-Kapitals u.a. durch immer mehr Konsum gesprochen wird. Doch welcher „Glaube" - oder ist es Wissen - nährt die Hoffnung, dass ein stetes, fortwährendes Wachstum überhaupt möglich ist?

Markt in Birma *Markt im Münchener DB-HBF* *Markt in Sevilla*

Ein Modell zum Wachstum des Industrie-Kapitals wird hier nicht ausgeführt. Dazu wird verwiesen auf MMM [Seite 1228.htm#TeilA]()

7.4.1 Darstellung der Wechselwirkungen zwischen Konsum und Investition in einem Wirkungsdiagramm

Es wird angenommen, dass der Konsum und die Investitionen strukturell genauso wachsen wie eine Population (siehe dazu Kapitel 2.1.3). Aber Konsum und Investition wirken wechselseitig aufeinander.



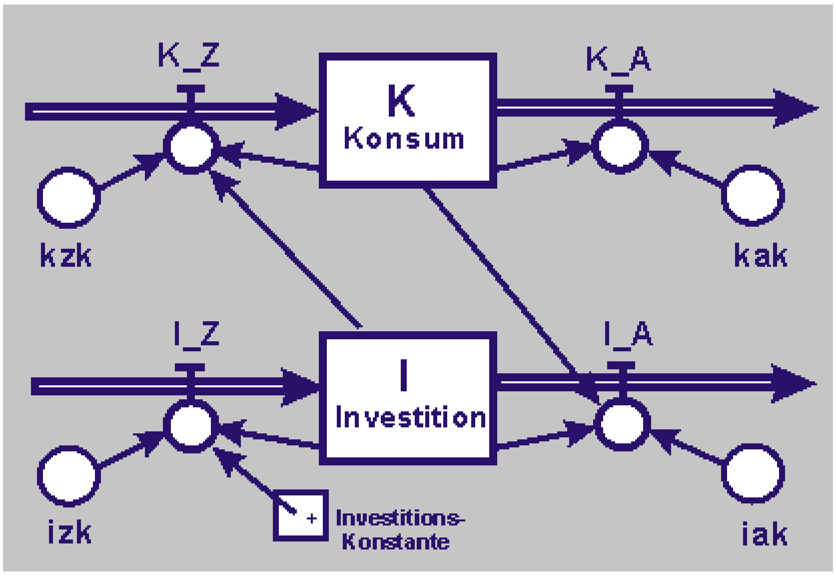
Zu den Wechselwirkungen wird angenommen: Höhere Investitionen, also ein höherer Kapitaleinsatz, wirken auf die Konsum_Zunahme positiv. Je höher die Investitionen sind, desto mehr wird konsumiert. Umgekehrt wirkt aber ein höherer Konsum auch verstärkend auf die Investitions_Abnahme. Je größer der Konsum wird, desto weniger Geld ist verfügbar, um es zu investieren.

7.4.2 Beschreibung der Dynamik in einem Flussdiagramm

Bei der Übertragung des Wirkungsdiagramms in ein Flussdiagramm sind die beiden Zustandsgrößen Konsum (**K**) und Investition (**I**) sowie die vier Flussgrößen Konsum_Zunahme (**K_Z**), Konsum_Abnahme (**K_A**), Investitions_Zunahme (**I_Z**) und Investitions_Abnahme (**I_A**) zu beachten. Auf die Zunahme und Abnahme von Konsum und Investition wirken der Konsum_Zunahme_Koeffizient (**kzk**), der Konsum_Abnahme_Koeffizient (**kak**), der Institions_Zunahme_Koeffizient (**izk**) und der Investitions_Abnahme_Koeffizient (**iak**).

Die Konstruktionen für die Flussgrößen sind strukturell dieselben, wie die Geburten- und Sterberaten beim Wachstum einer Population. Aber Konsum und Investition wirken aufeinander.

I wirkt auf **K_Z** und **K** wirkt auf **I_A** und zwar jeweils multiplikativ verknüpft mit den jeweiligen Koeffizienten. Zusätzlich wird angenommen, dass auf die Investitions_Zunahme eine additive Investitionskonstante (**ik**) wirkt. Das kann bedeuten, dass regelmäßig ein gewisser Betrag investiert wird.



7.4.3 Beschreibung des Modells durch Zustands- und Modellgleichungen

Die folgenden zwei Zustands- und vier weiteren Modellgleichungen entwickeln wir aus dem Flussdiagramm unter Berücksichtigung eines Zeittaktes zwischen Zustand_neu und Zustand_alt. Alle Anfangsgrößen und Koeffizienten belegen wir mit Zahlen.

K_neu ← K_alt + Δt * (K_Z – K_A); Anfangsgröße: **K = 4** (Mill €),

I_neu ← I_alt + Δt * (I_Z – I_A), Anfangsgröße: **I = 2** (Mill €),

Δt = 0,3 (Interpretationsmöglichkeiten: 1 Zeittakt = 1 Monat oder 1 Quartal oder 1 Jahr)

K_Z = kzk * K * I; kzk = 0,3

K_A = kak * K; kak = 0,8

I_Z = ik + izk * I; ik = 1,5; izk = 0,8;

I_A = iak * I * K; iak = 0,6

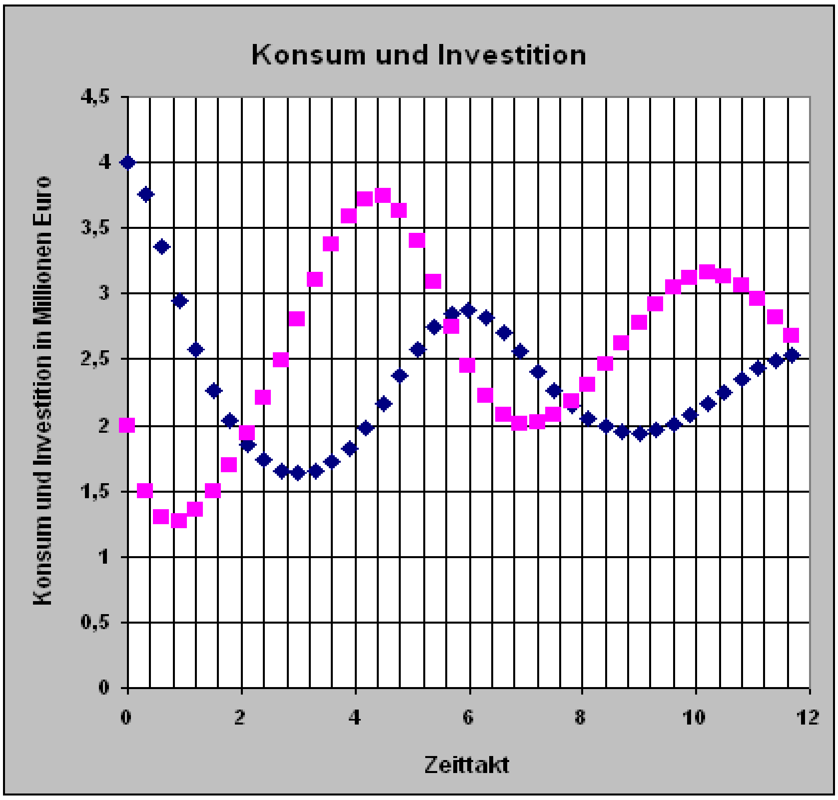
7.4.4 Programmierung der Zustands- und Modellgleichungen mit Excel

Die Zahlen in dem Ausschnitt der Excel-Tabelle sind auf 4 Stellen hinter dem Komma gerundet.

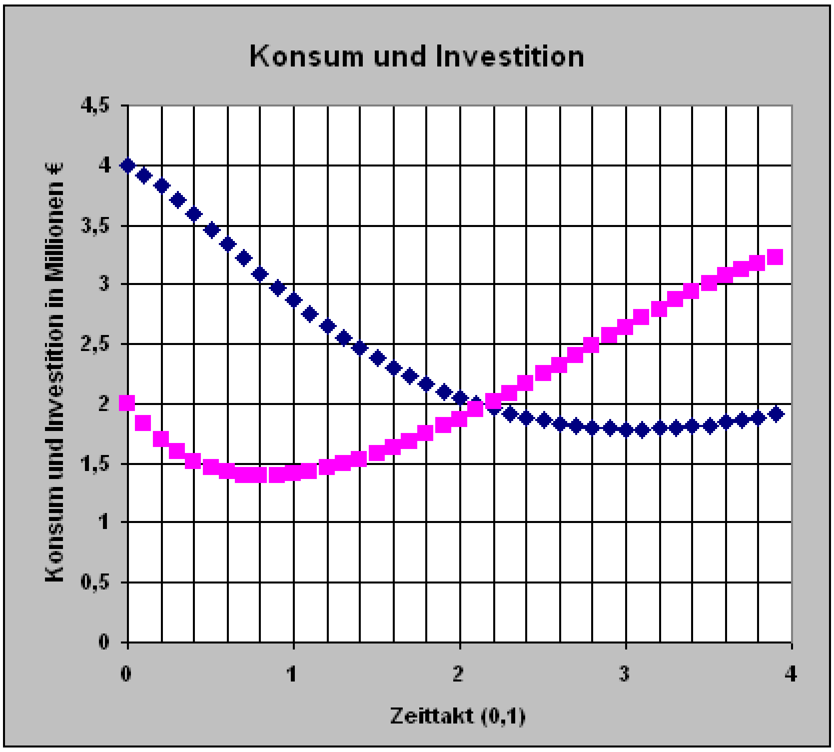
Zeittakt	Δt	kzk	kak	izk	iak	K_Z	K_A	ik	I_Z	I_A	K-neu	I_neu
0	0,3	0,3	0,8	0,8	0,6			1,5			4	2
0,3	0,3	0,3	0,8	0,8	0,6	2,4	3,2	1,5	3,1	4,8	3,76	1,49
0,6	0,3	0,3	0,8	0,8	0,6	1,6807	3,008	1,5	2,692	3,3614	3,3618	1,2892
0,9	0,3	0,3	0,8	0,8	0,6	1,3002	2,6894	1,5	2,5314	2,6004	2,945	1,2685
1,2	0,3	0,3	0,8	0,8	0,6	1,1207	2,356	1,5	2,5148	2,2414	2,5744	1,3505
1,5	0,3	0,3	0,8	0,8	0,6	1,043	2,0595	1,5	2,5804	2,086	2,2695	1,4988
1,8	0,3	0,3	0,8	0,8	0,6	1,0205	1,8156	1,5	2,699	2,0409	2,031	1,6962
2,1	0,3	0,3	0,8	0,8	0,6	1,0335	1,6248	1,5	2,857	2,067	1,8536	1,9332
2,4	0,3	0,3	0,8	0,8	0,6	1,075	1,4829	1,5	3,0466	2,15	1,7312	2,2022
2,7	0,3	0,3	0,8	0,8	0,6	1,1437	1,385	1,5	3,2618	2,2875	1,6588	2,4945

7.4.5 Simulationen des Modells

Das folgende erste Simulationsergebnis entspricht den eingegebenen Größen. Weitere Simulationsergebnisse lassen sich durch Veränderung von Delta t, den Anfangsgrößen, den Koeffizienten und der Konstante erzeugen.

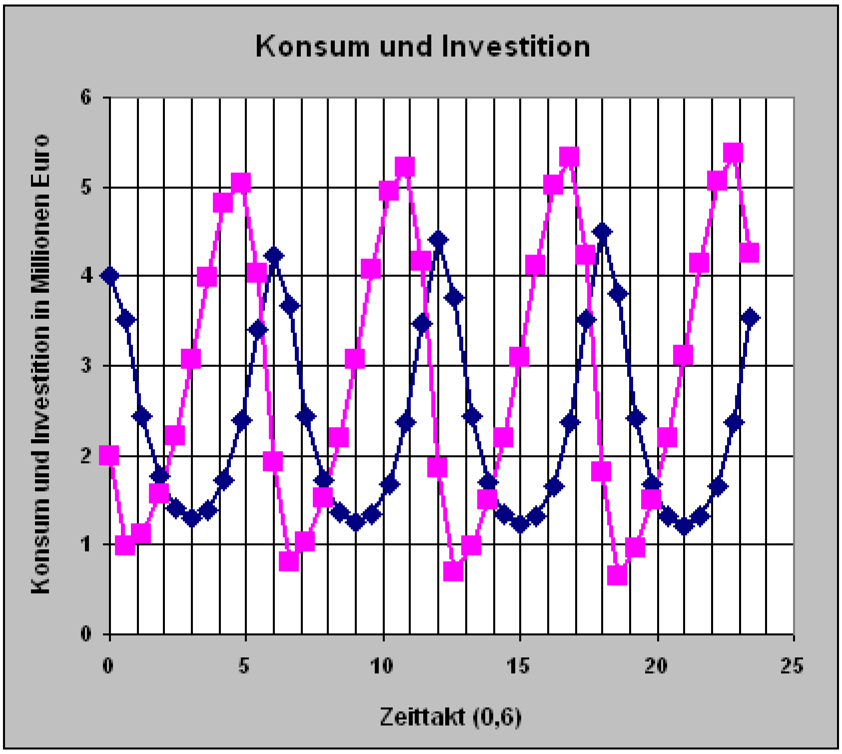


Wird **Δt = 0,1** gesetzt und werden alle anderen Größen wie zuvor beibehalten, dann ergibt sich das folgende Simulationsergebnis.



In allen Fällen muss der Zeittakt interpretiert werden.

Eine Vergrößerung auf **Δt = 0,6** ändert den Zeittakt erneut. Wird die Zeittakt-Skala diesen rechnerischen Zeitschritten angepasst und werden alle anderen Werte von vorher beibehalten, so ergibt sich das folgende Diagramm. Im Vergleich zum ersten zeigt es aber ein anderes „Schwingungs-Verhalten". Die Amplitude wird größer! Mit Vergrößerung von Δt wird also eine Interpretation immer schwieriger bis kaum noch sinnvoll.



Woher kommen in diesem Modell die Zahlen für die Koeffizienten, für die Konstante und für Δt?

Auch in diesem Fall finden wir die obigen **robusten Zahlen** für die Koeffizienten, für die Konstante und auch für Δt durch Simulationen. (Siehe hierzu die Erklärungen zum Räuber-Beute-Modell in den Kapiteln 2.2.6. und insbesondere im Kapitel 3.3)

Von einem Modell mit robusten Zahlen gehen wir aus. Denn dann sind auch weitere Simulationen mathematisch interpretierbar, wenn die Parameter nicht zu gewaltig verändert werden. Die mathematische Interpretierbarkeit ist die Voraussetzung für eine inhaltliche Interpretation, die aber eine Interpretation des Zeittaktes notwendig macht.

7.4.6 Verhaltensbeschreibung, Interpretation, Zweck und Grenzen des Modells

Konsum und Investition schwingen zeitversetzt und gegenläufig. Nimmt der Konsum ab, so steigen die Investitionen. Nimmt der Konsum wieder zu, so fallen die Investitionen. Und das immer ein wenig zeitlich nachhinkend. Dieselbe Erkenntnis lässt sich auch aus den Simulationen gewinnen, in denen die Werte für die Anfangsgrößen, die Koeffizienten und für die Konstante nicht zu stark abgewandelt werden.

Der Zweck des Modells kann also genau diese qualitative Erkenntnis sein: **Konsum und Investition schwingen zeitversetzt und gegenläufig immer zeitlich etwas nachhinkend.**

Soll der Zweck des Modells eine mehr quantitative Vorhersage sein, so müssen die Anfangsgrößen, die Koeffizienten und die Konstante aus den aktuellen Wirtschaftsdaten (siehe in MMM z.B. die Seite ma0224.htm) heraus analysiert werden (etwa durch funktionale Modellierung!) und insbesondere muss der Zeittakt interpretiert werden.

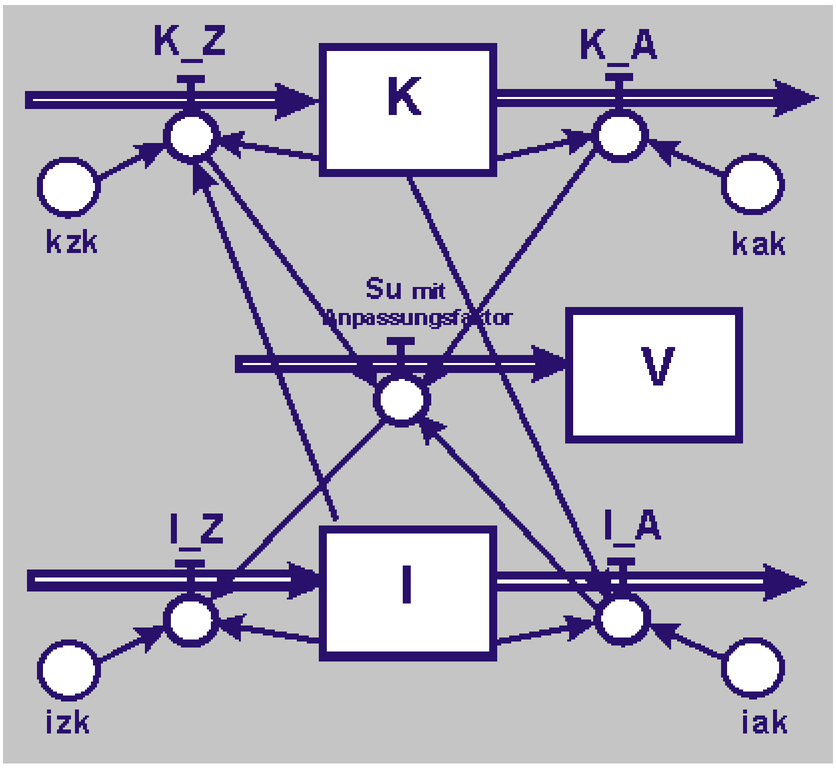
Die Grenzen dieses Modells liegen in den Annahmen, die in dem obigen Flussdiagramm zu sehen sind. Denkbar wären natürlich auch andere Wechselwirkungs-Kopplungen zwischen Konsum und Investition. Strukturell ist das Modell mit dem Prototyp eines Räuber-Beute-Modells vergleichbar.

7.5 Volkseinkommen in Abhängigkeit von Konsum und Investition – immer noch höher!?

Die Wechselwirkungen zwischen Konsum und Investition können um eine weitere mit dem Volkseinkommen (siehe Seite „Stetiges Wirtschaftswachstum - Bruttoinland- und Bruttosozialprodukt; ma3160.htm#Einkommen) **ergänzt werden**. Eine ökonomisch ausführliche Beschreibung zu diesem Modell ist in wikipedia unter Multiplikator-Akzelerator-Modell zu finden. Zum Verständnis der Wechselwirkungen sind einige wirtschaftliche Grundkenntnisse notwendig, die sich aber ein kompetenter Laie aneignen kann.

7.5.1 Darstellung der Wechselwirkungen in einem Flussdiagramm

In diesem Modell wird der Wechselwirkungszusammenhang zwischen Konsum und Investition so beibehalten, wie er oben im Flussdiagramm unter 7.4.2 dargestellt ist. Zusätzlich wird jetzt aber die **Zustandsgröße Volkseinkommen** (**V**) und eine **Flussgröße Summe** (**Su**) eingefügt.



Als **kompetente Laien** nehmen wir an, dass der Wechselwirkungszusammenhang von Konsum und Investition wie folgt qualitativ auf das Volkseinkommen wirkt:

Wird mehr konsumiert, so steigt das Volkseinkommen z.B. über die Mehrwertsteuer. Also: Die Konsum_Zunahme wirkt positiv auf die Flussgröße „Summe“.

Wird aber weniger konsumiert, nimmt also der Konsum ab, so wird gespart und das Volkseinkommen steigt ebenfalls durch „Kapitalbildung“. Also: Die Konsum_Abnahme wirkt ebenfalls positiv auf die Flussgröße „Summe“.

Wird aber weniger investiert, nimmt also die Investition ab, so sinkt auch das Volksvermögen. Also: Die Investitions_Abnahme wirkt negativ auf die Flussgröße „Summe“.

Schließlich nehmen wir einen Summen_Anpassungsfaktor (**saf**) an, der auf die Flussgröße Summe wirkt.

Das Volksvermögen steigt also über die Flussgröße **Summe** an. Letztere wirkt daher, wie eine Investitionskonstante, additiv auf die Investitions_zunahme.

7.5.2 Beschreibung des Modells durch Zustands- und Modellgleichungen

Die folgenden drei Zustands- und fünf weiteren Modellgleichungen werden aus dem Flussdiagramm entwickelt und zwar unter Berücksichtigung der obigen qualitativen Beschreibungen und eines Zeittaktes zwischen Zustand_neu und Zustand_alt.

K_neu ← K_alt + Δt * (K_Z – K_A); Anfangsgröße: **K = 4** (Mill €),

I_neu ← I_alt + Δt * (I_Z – I_A); Anfangsgröße: **I = 2** (Mill €),

V_neu ← V_alt + Su; Anfangsgröße: **V = 0** (Mill €),

Δt =0,1 (**Interpretationsmöglichkeiten:**

1 Zeittakt = 1 Woche oder 1 Monat oder 1 Quartal, ...)

K_Z = kzk * K * I; kzk = 0,3

K_A = kak * K; kak = 0,8

Su = saf * (K_Z + K_A – I_A); saf = 0,1

I_Z = izk * I + Su; izk = 0,8

I_A = iak * I * K; iak = 0,6

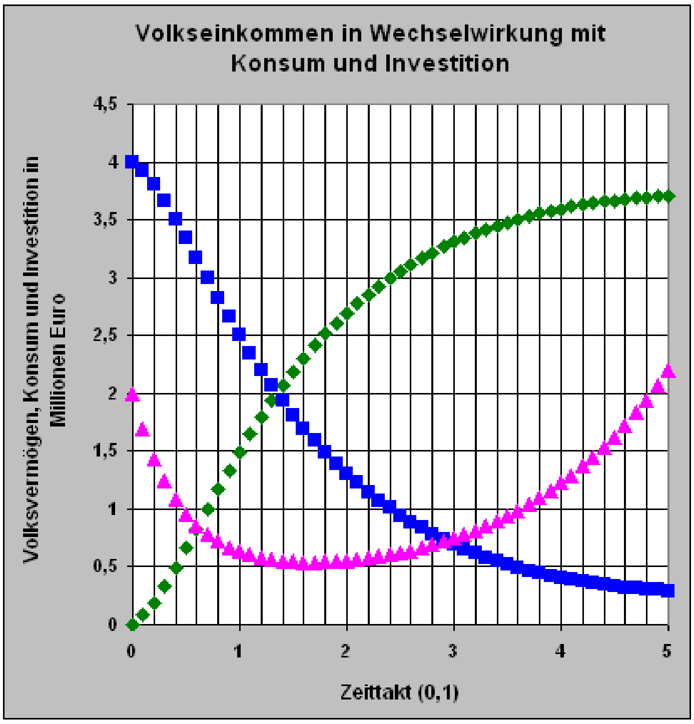
7.5.3 Programmierung der Zustands- und Modellgleichungen mit Excel

Die Zahlen in dem Ausschnitt der Excel-Tabelle sind auf 4 Stellen hinter dem Komma gerundet.

Zeit-takt	Δt	kzk	kak	izk	iak	K_Z	K_A	saf	Su	I_Z	I_A	V	K	I
0	0,1	0,3	0,8	0,8	0,6			0,1				0	4	2
0,1	0,1	0,3	0,8	0,8	0,6	2,4	3,2	0,1	0,08	1,68	4,8	0,08	3,92	1,688
0,2	0,1	0,3	0,8	0,8	0,6	1,9851	3,136	0,1	0,1151	1,4655	3,9702	0,1951	3,8049	1,4375
0,3	0,1	0,3	0,8	0,8	0,6	1,6409	3,0439	0,1	0,1403	1,2903	3,2817	0,3354	3,6646	1,2384
0,4	0,1	0,3	0,8	0,8	0,6	1,3615	2,9317	0,1	0,157	1,1478	2,7229	0,4924	3,5076	1,0809
0,5	0,1	0,3	0,8	0,8	0,6	1,1374	2,8061	0,1	0,1669	1,0316	2,2748	0,6593	3,3407	0,9566
0,6	0,1	0,3	0,8	0,8	0,6	0,9587	2,6726	0,1	0,1714	0,9367	1,9174	0,8307	3,1693	0,8585
0,7	0,1	0,3	0,8	0,8	0,6	0,8163	2,5354	0,1	0,1719	0,8587	1,6325	1,0026	2,9974	0,7811
0,8	0,1	0,3	0,8	0,8	0,6	0,7024	2,3979	0,1	0,1696	0,7944	1,4048	1,1722	2,8279	0,7201
0,9	0,1	0,3	0,8	0,8	0,6	0,6109	2,2623	0,1	0,1651	0,7412	1,2218	1,3373	2,6628	0,672
1	0,1	0,3	0,8	0,8	0,6	0,5368	2,1302	0,1	0,1593	0,6969	1,0736	1,4966	2,5035	0,6343

Die Koeffizienten, die im Wechselwirkungsmodell für Konsum und Investition gewählt wurden (siehe Kapitel 7.4.3), werden hier beibehalten. Lediglich für Δt wird 0,1 gewählt. Das entspricht der zweiten oben dargestellten Simulation im Kapitel 7.4.5.

7.5.4 Simulationen des Modells

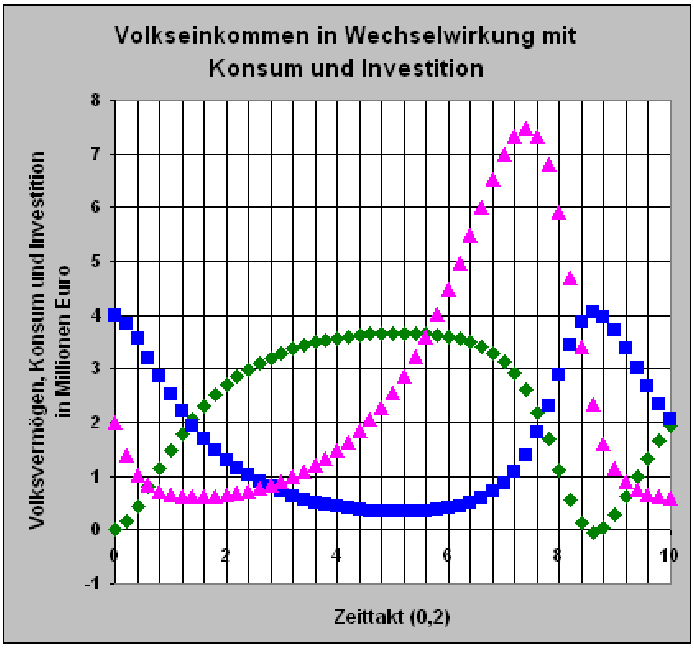


Das vorstehende Simulationsergebnis entspricht den Werten in der obigen Tabelle. Weitere

Simulationsergebnisse lassen sich durch Veränderung von Delta t sowie durch Änderung der Anfangsgrößen, der Koeffizienten und der Konstante erzeugen.

Bringt man das vorstehende Simulationsergebnis mit dem zweiten oben dargestellten für Konsum und Investition in Verbindung, dann kann zunächst wieder festgestellt werden, dass der Konsum und die Investition zeitlich versetzt hintereinander herhinken. Hier aber etwas deutlicher als oben für Konsum und Investition.

Im folgenden Simulationsergebnis wurden Δt und saf verdoppelt. Alle anderen Werte wurden beibehalten. Natürlich ist es wenig realistisch, dass das Volkseinkommen ins Negative rutscht.



7.5.5 Verhaltensbeschreibung, Interpretation, Zweck und Grenzen des Modells

Das Volkseinkommen steigt erst schneller dann immer langsamer, je nachhaltiger der Konsum nachlässt. Es nähert sich sogar einem Höchstwert und sinkt dann wieder, wie das zweite Simulationsergebnis zeigt. **Das Volkseinkommen bildet träge Wellen aus, die sich dem zeitlich versetzten Schwingen von Konsum und Investition überlagern.**

Der **Zweck des Modells** kann also für ökonomische Laien genau diese qualitative Erkenntnis sein. Oder noch einfacher: Ein gesteigerter Konsum wirkt sich positiv auf das Volkseinkommen aus. Oder: Konsum ist am Wirtschaftswachstum beteiligt.

Natürlich steckt in diesem Modellergebnis auch eine Hoffnung: Nämlich die, eine **neue Qualität wirtschaftlichen Wachstums „Mehr unter Einsatz von Weniger“** zu erreichen (siehe den Begriff „qualitatives Wachstum“ in Pestel, 1988)!

Diese Feststellung zeigt dann aber auch, dass die vorstehende Modellierung ihr Grenzen hat und nur mit ökonomischen Grundkenntnissen so erweiterbar ist, dass sie auch quantitativ interpretiert werden kann.

Eine vollständige Lösung mit Verlinkungen auf das reale Problem sowie auf die erwerbbaren Kompetenzen und auf die interaktiven ExcelTabellen kann in MMM auf [Seite ma1228.htm](ma1228.htm) eingesehen werden.

Eine mögliche Lösung zur funktionalen Modellierung ebenfalls mit Verlinkungen auf das reale Problem sowie auf die erwerbbaren Kompetenzen und auf die interaktiven ExcelTabellen kann in MMM auf [Seite ma1226.htm](ma1226.htm) eingesehen werden oder in der Schrift „Funktionale Modellierung" im Kapitel 7 nachgelesen werden.

7.6 Ausreichende Ernährung durch nachhaltige Flächenentwicklung?

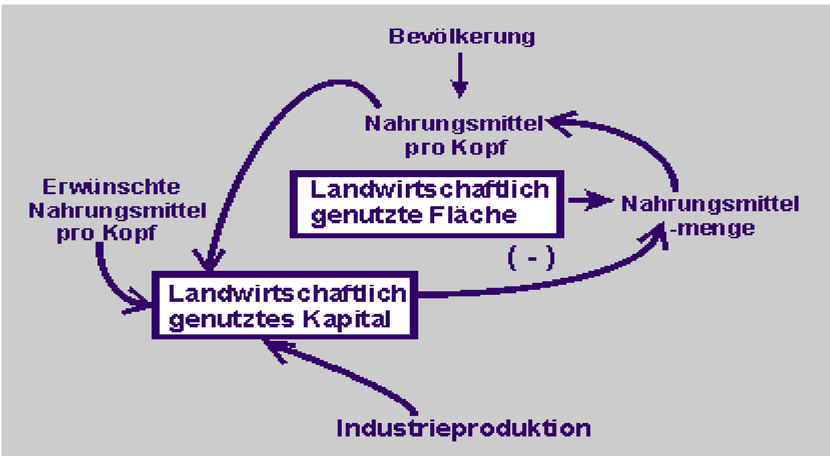
Überlegungen am Beispiel der Subsahara-Zone

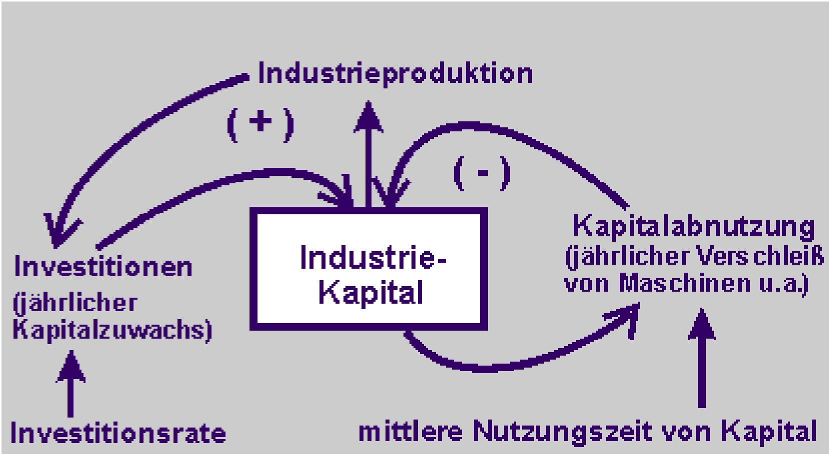
„Heute versuchen die **führenden Industrieländer** ihre technischen und gesellschaftlichen Strukturen neu zu gestalten und bemühen sich dabei, die ihnen innewohnenden Kräfte neu zu beleben und zu verjüngen, indem sie eine **neue Qualität wirtschaftlichen Wachstums** (Mehr unter Einsatz von Weniger!) suchen.

In den **Ländern der Dritten Welt** wird ein radikal anderer Weg verfolgt. Da ihre schwachen wirtschaftlichen Kräfte ... noch immer kaum zur Befriedigung der Grundbedürfnisse ihrer schnell wachsenden Bevölkerungen ausreichen, setzen diese Länder gezwungenermaßen ihre Anstrengungen für **quantitatives Wachstum** fort**. Auf diesem Weg wollen sie (z.B.) ... den Lebensstandard ihrer Bürger auf ein akzeptables Niveau heben und ihnen einen immer besseren Zugang zur Nahrung zu eröffnen,**...“ (Eduard Pestel, 1988). *(Hervorhebungen durch die Verfasser)*

7.6.1 Beschreibung von Wechselwirkungen zwischen Bevölkerung, Nahrungsproduktion und Kapitaleinsatz in Wirkungsdiagrammen

Aus dem komplexen Wirkungsgefüge von „Bevölkerung, Kapital, Landwirtschaft und Umweltverschmutzung“ (siehe Wirkungsdiagramm in Kapitel 7.2.1) werden nun die getrennten Subsysteme zum Bevölkerungswachstum, zur Nahrungsproduktion und zum Kapitaleinsatz in einen Wirkungsdiagramm und dann in einem Flussdiagramm vereint.





Analyse von Zustands- und Flussgrößen für das folgende Flussdiagramm

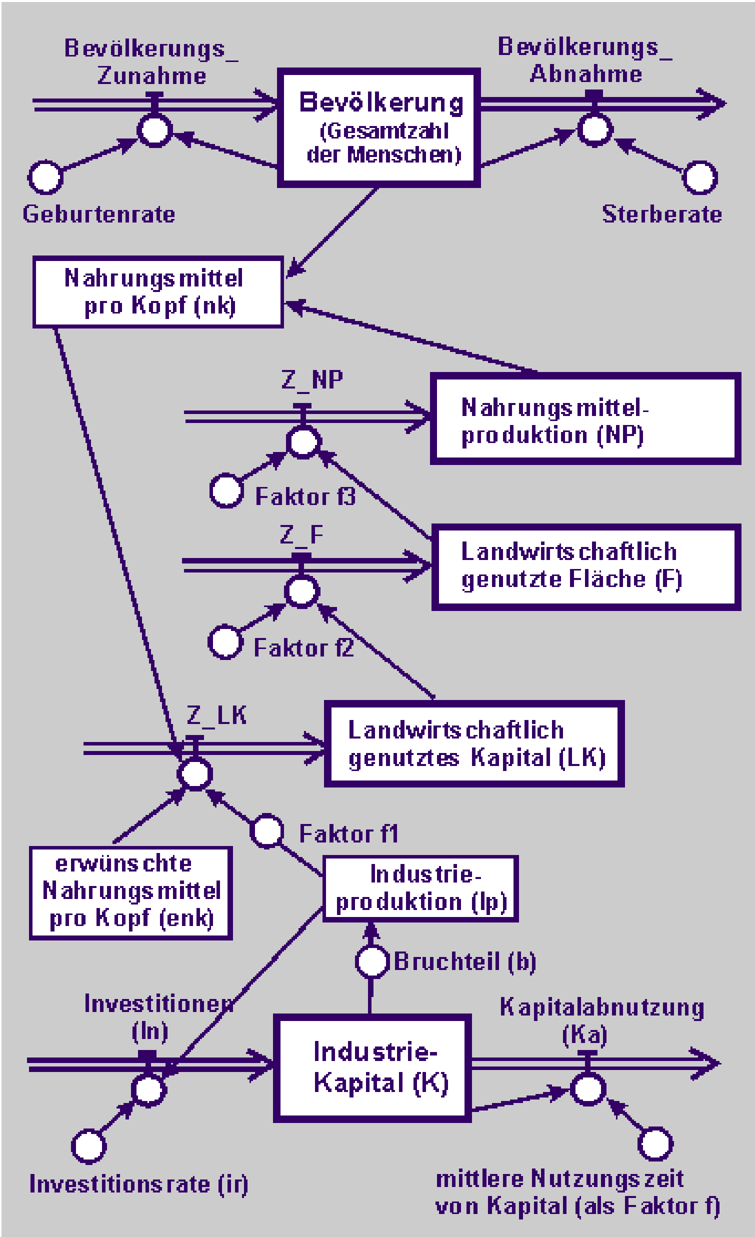
Im **Subsystem Bevölkerung** gibt es die Zustandsgröße „Bevölkerung (**B**)“. Und auf diese wirken die beiden Flussgrößen: Zunahme_Bevölkerung (**Z_B**) (eine positive Rückkopplung) und Abnahme_Bevölkerung (**A_B**) (eine negative Rückkopplung). Geburtenziffer (rate) (**gr)** und Sterbeziffer (rate) (**sr)** wirken ihrerseits auf die Flussgrößen (zur Begrifflichkeit siehe „Wachstumszahlen, -Ziffern und -Raten ...“; ma2905.htm).

Im **Subsystem Nahrungsproduktion** können die Zustandsgrößen „Landwirtschaftlich genutztes Kapital (**LK**)“, „Landwirtschaftlich genutzte Fläche (**F**)“ und „Nahrungsmittelproduktion (**NP**)“ betrachtet werden. Diese Größen haben jeweils einen Zuwachs: Mit dem eingesetzten Kapital wächst die nutzbare Fläche, und mit der nutzbaren Fläche wächst die produzierte Nahrungsmenge. Entsprechend sind die drei folgenden Flussgrößen in Betracht zu ziehen: Zunahme_Landwirtschaftliches Kapital (**Z_LK**), Zunahme_Landwirtschaftliche Fläche (**Z_F**) und Zunahme_Nahrungsmittelproduktion (**Z_NP**). Auf diese Flussgrößen wirkt jeweils ein Anpassungsfaktor **f1, f2 und f3**, auch um die Dimensionen der Größen aneinander anzupassen.

Die wirkliche Nahrungsmenge pro Kopf (**nk**) und die erwünschte Nahrungsmenge pro Kopf (**enk**) erzeugen einen Rückkopplungskreis über das eingesetzte „Kapital“.

Im **Subsystem Kapital** gibt es die Zustandsgröße „Kapital (**K**)“. Auf dieses wirken die Flussgrößen Investition (**In)** und Kapitalabnutzung (**Ka)**. Ein Bruchteil des Kapitals wird zur Industrieproduktion (**Ip)** genutzt und ein Teil davon für die landwirtschaftliche Produktion. Auf die Flussgrößen wirken einerseits eine Investitionsrate (**ir**) und andererseits ein Kapital-Abnutzungsfaktor **f**.

7.6.2 Beschreibung der Dynamik in einem Flussdiagramm



Die drei Wirkungsnetze werden zu einem Flussdiagramm zusammengeführt. Natürlich müssen die Anfangsgrößen auf das zu untersuchende Gebiet der Welt, **hier auf die Subsahara-Zone**, zugeschnitten werden. Und das macht analysierende Teiluntersuchungen und Recherchen notwendig z.B. für die Sterbe- und Geburtenziffern (raten) sowie für das eingesetzte Kapital in der Subsahara-Zone.

Zur Bestimmung der Faktoren und zur Berechnung von enk siehe Kapitel 7.2.2. Siehe aber auch in MMM die funktionale Modellierung “Extreme Armut, Hunger, Unterernährung und deren Folgen“ (Seite ma1337.htm).

7.6.3 Beschreibung des Modells durch Zustands- und weitere Modellgleichungen

Die folgenden Zustands- und Modellgleichungen werden aus dem vorstehenden Flussdiagramm abstrahiert.

B_neu ← B_alt + Δt * (Z_B - A_B);

Anfangsgröße **B = 750 Millionen** (Subsahara-Zone im Jahr 2007);

Δt = 1; (Interpretation: 1 Zeittakt = 1 Jahr)

Z_B = gr * B; gr = 0,041(Mittelwert aus der Subsahara-Zone)

A_B = sr * B; sr = 0,029 (Mittelwert aus der Subsahara-Zone)

LK_neu ← LK_alt + Δt * Z_LK; Anfangsgröße **LK = 600 Milliarden €;**

F_neu ← F_alt + Δt * Z_F; Anfangsgröße **F = 300 Tausend ha**;

NP_neu ← NP_alt + Δt * Z_NP; Anfangsgröße **NP = 100 Mill. Tonnen**;

Δt = 1; (Interpretation: 1 Zeittakt = 1 Jahr)

Z_LK = (enk - nk) * f1; enk = 0,26 Tonnen; **nk = NP/B; f1 = 8**

Z_F = LK * f2; f2 = 0,016

Z_NP = F * f3; f3 = 0,015

In den folgend dargestellten Simulationen wird **LK** mit einer Anfangsgröße gestartet. Das Kapitalwachstum bleibt in den dann folgenden Simulationen unberücksichtigt, könnte aber selbstorganisiert eingebunden werden mit:

Z_LK = (enk - nk) * f* Ip

K_neu ← K_alt + Δt * (In - Ka); Anfangsgröße Kapital **ggf. K = 2 Billionen €;**

Ip = K * b; b = ggf. 0,4

In = Ip * ir; ir = ggf. 0,2

Ka = K * f; f = ggf. 0,02

7.6.4 Programmierung der Modellgleichungen in einer Excel-Tabelle

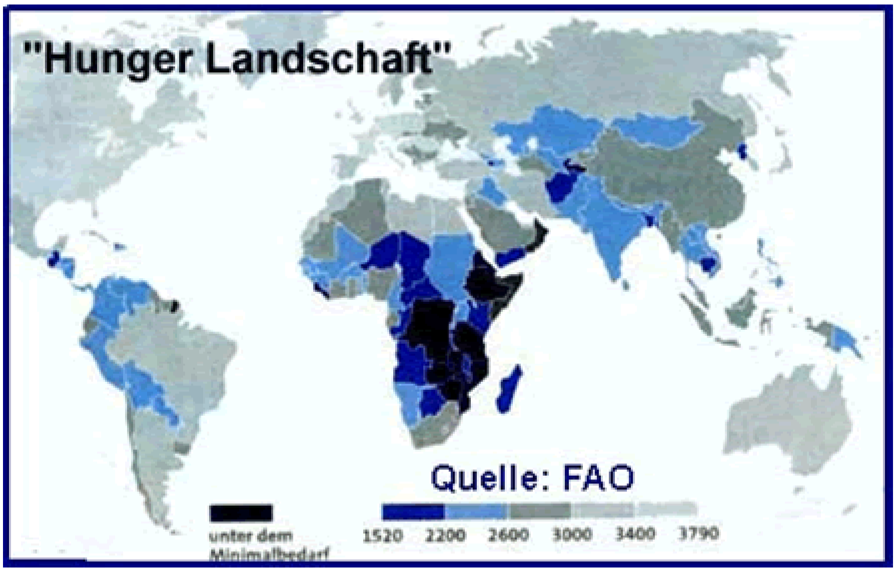
Zunächst sind also nur die vier Zustandsgleichungen für Bevölkerung, landwirtschaftlich genutztes Kapital, landwirtschaftlich genutzte Fläche und Nahrungsproduktion sowie die zugehörigen Modellgleichungen in einer Excel-Tabelle programmiert. Sie ist so groß, dass sie hier nur mit einer Fortsetzung darstellbar ist.

Zeittakt Jahre	Δt	gr	sr	Z_B	A_B	Millionen B	f1	f2	f3	Tonnen enk
0	1	0,041	0,029			750	8	0,016	0,015	0,26
1	1	0,041	0,029	30,75	21,75	759	8	0,016	0,015	0,26
2	1	0,041	0,029	31,119	22,011	768,1	8	0,016	0,015	0,26
3	1	0,041	0,029	31,492	22,275	777,3	8	0,016	0,015	0,26
4	1	0,041	0,029	31,869	22,542	786,6	8	0,016	0,015	0,26
5	1	0,041	0,029	32,251	22,811	796	8	0,016	0,015	0,26

Fortsetzung der Tabelle:

Z_NP	Millionen t NP	Tonnen nk	Z_LK	Milliarden € LK	Z_F	Tausend ha F
	100	0,133		600		300
4,5	104,5	0,1377	1,016	601	9,6	309,6
4,644	109,1	0,142	0,9784	602	9,616	319,2
4,788	113,9	0,1465	0,944	602,9	9,632	328,8
4,932	118,8	0,151	0,908	603,8	9,6464	338,4
5,076	123,9	0,1557	0,872	604,7	9,6608	348,1

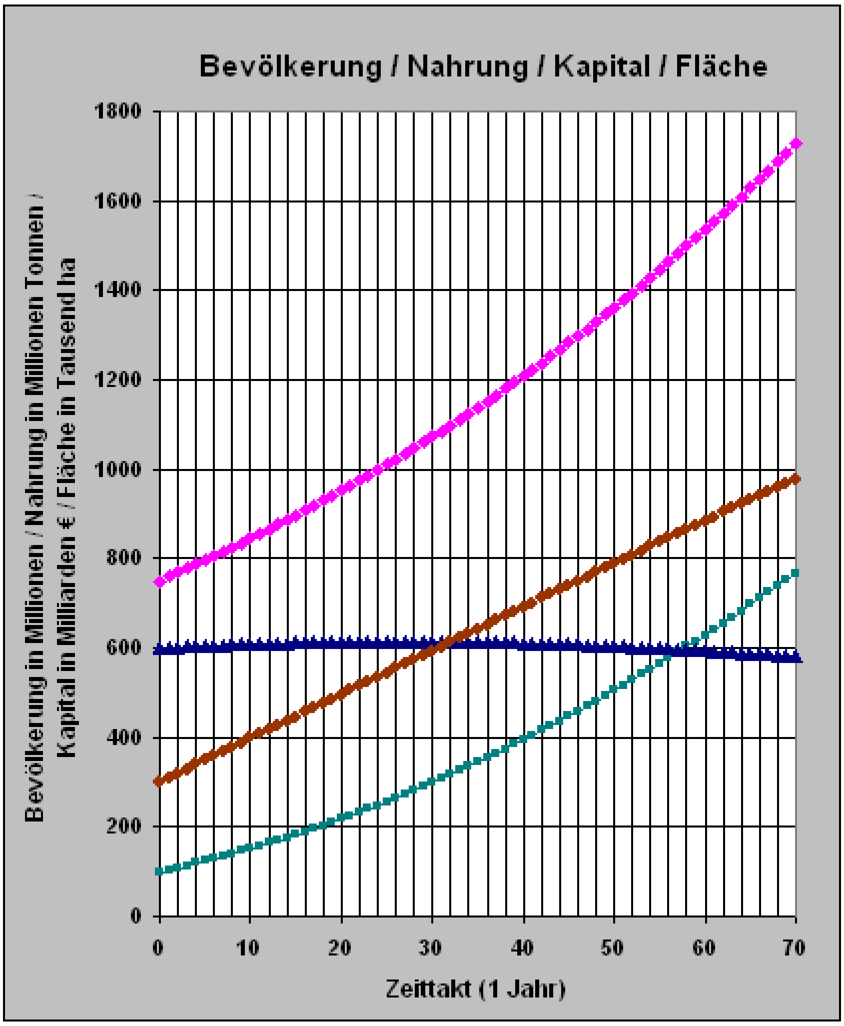
Die Zahlen sind auf ein bis drei Stellen hinter dem Komma gerundet. Die Faktoren f1, f2 und f3 sind experimentell in der Weise ermittelt, dass die verfügbare Nahrungsmenge von 1500 kcal pro Kopf steigt und sich somit die Länder aus der „Hunger Landschaft“ entfernen.



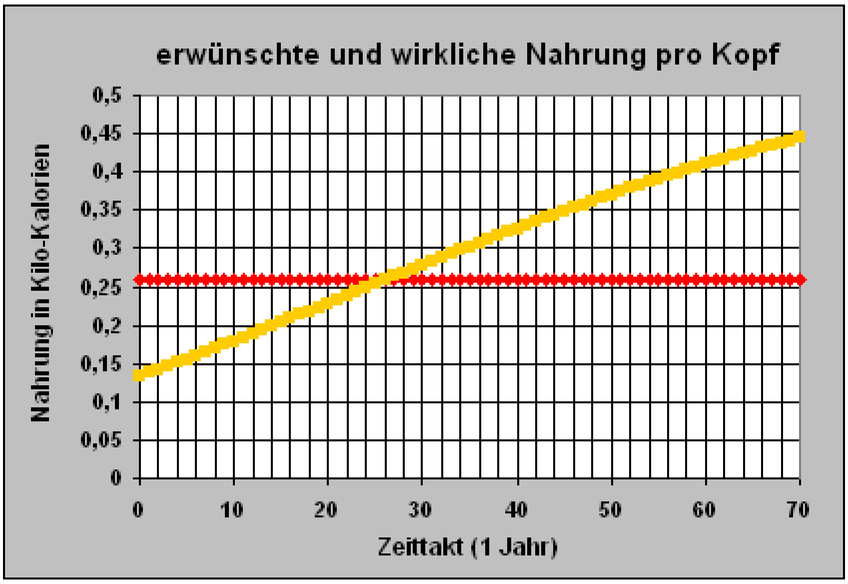
Die Größen entsprechen in etwa dem Zustand in der Subsahara-Zone, die aus 48 Staaten besteht. Die Geburten- und Sterberate sind ein Mittelwert aus diesen Ländern und erzeugen eine Bevölkerungszahl, wie sie für 2020 von der Weltbank eingeschätzt wird.

7.6.5 Simulationen des Modells

Das folgende Simulationsergebnis entspricht den Größen, die oben in den Zustands- und Modellgleichungen gesetzt wurden. Es zeigt eine **agrarbasierte Wachstumsstrategie** (Pestel, 1988), da in der Subsahara-Zone die Landwirtschaft der Schlüsselsektor für die volkswirtschaftliche Entwicklung und für die Reduzierung des Hungers ist. Er könnte noch schneller durch höheren Kapitaleinsatz reduziert werden.

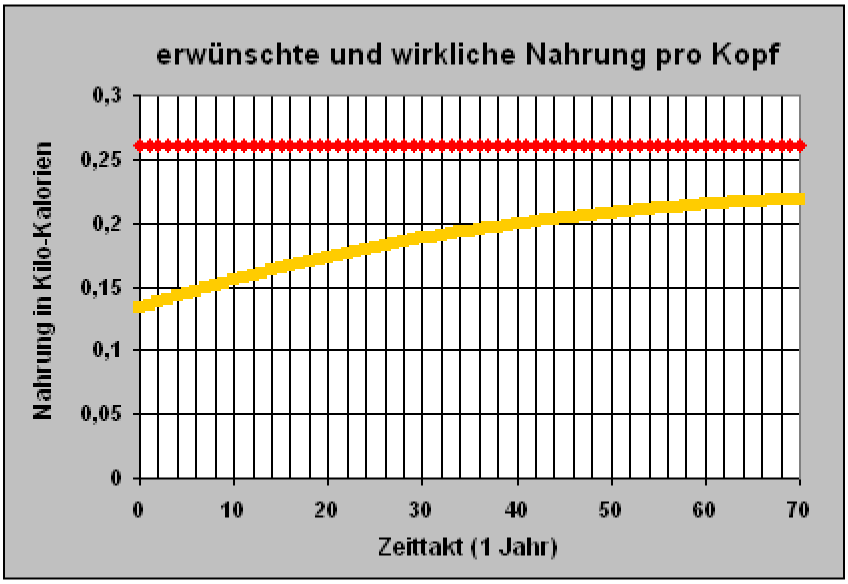


Bevölkerung = violett; Kapital = blau; Land = braun; Nahrungsproduktion = grün;



Im vorstehenden Diagramm ist die wirkliche Nahrungsmenge pro Kopf pro Tag ist gelb eingezeichnet; rot ist die erwünschte Nahrungsmenge von 3000 kcal pro Tag gezeichnet, die den Hunger beseitigt.

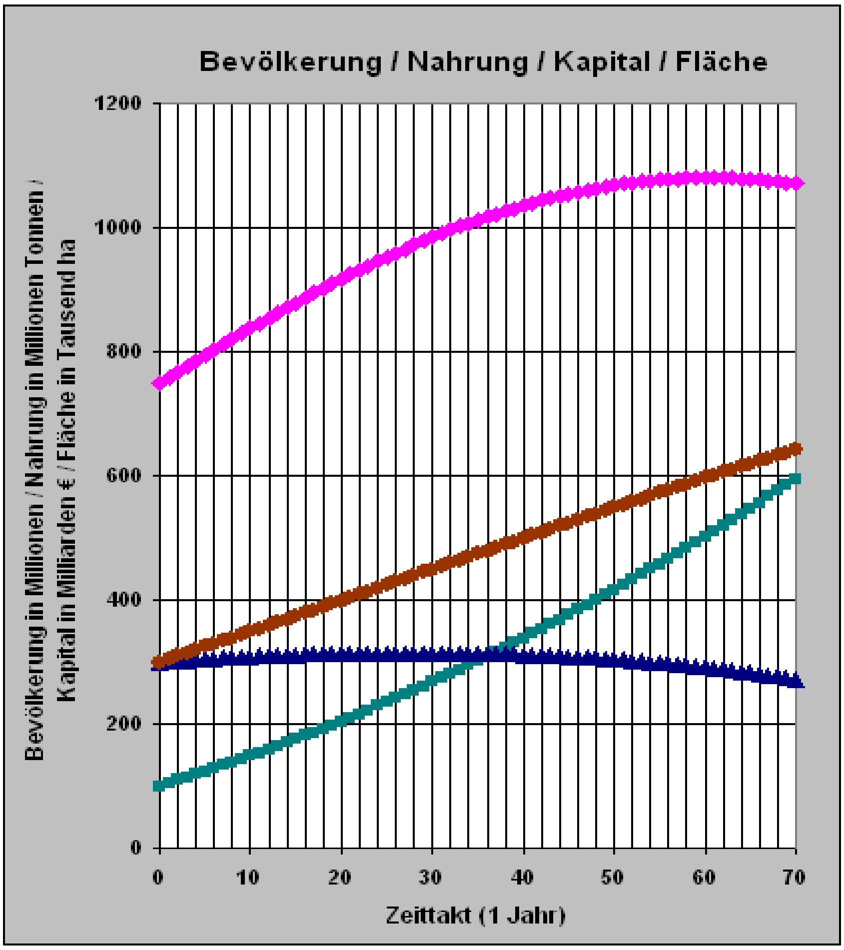
In einer weiteren Simulationen werden die derzeitig vorherrschenden Verhältnisse simuliert, die zurzeit noch durch eine starke Unterkapitalisierung gekennzeichnet sind. Daher wird auf Grund von „bürgerkriegsartigen Querelen“ in vielen dieser Staaten in einer folgenden Simulation **LK = 100** und **F = 200** gesetzt. Dann nimmt die Bevölkerung zwar auch weiter zu, aber der Hunger (die gelbe Linie) bleibt noch für sehr lange Zeit weit unter dem notwendigen Nahrungsbedarf von 3000 kcal pro Tag pro Kopf!

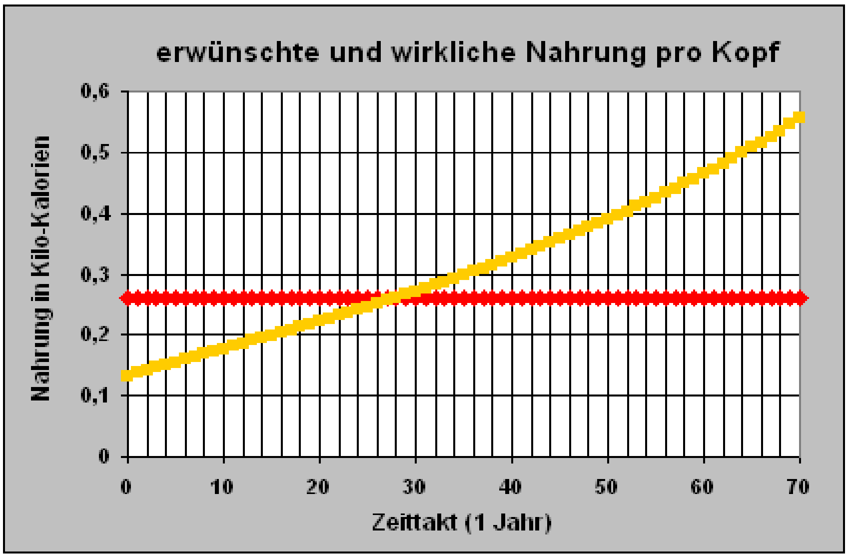


In einer dritten Simulationen nehmen wir an, dass durch „Aufklärung“ die Geburtenrate gr = 0,041 stetig sinkt aber die Sterberate sr = 0,029 sich durch AIDS immer noch weiter erhöht.

gr = -0,0001 * t + 0,041 und sr = 0,0001 * t + 0,029

Dann ergeben sich auch bei schon bei niedrigerem Kapitaleinsatz **LK = 300** aber gleich bleibend hoher Fläche **F = 300** schneller Verhältnisse, die den Hunger langsam beseitigen.





7.6.6 Verhaltensbeschreibung, Interpretation, Zweck und Grenzen des Modells

Der Zweck dieses Modells ist also alleine eine Formulierung von möglichen Hoffnungen oder Visionen!

Das Modell ist in keiner Weise ein Vorhersagemodell, es sei denn die Industrieländer entnehmen den Simulationen den Auftrag, Kapital in die Urbarmachung der Länder zum Zweck einer verbesserten Nahrungsproduktion vor Ort zu investieren.

Für den Fall eines zunehmenden Grades an Kapitaleinsatz (und damit einer Mechanisierung in der bäuerlichen Landwirtschaft) wird sich die Nahrungssituation - natürlich den länderspezifischen Verhältnissen angepasst - verbessern lassen. Aber die Mechanisierung sollte dabei in erster Linie der Steigerung der Flächenproduktivität, der Arbeitserleichterung und der Qualitätsverbesserung dienen, nicht aber zur Freisetzung von Arbeitskräften führen, weil nur so ländliche Arbeitslosigkeit (und damit erneuter Hunger in diesen Kreisen) vermieden werden kann. Genau das geschieht aber mit einer teils exzessiven Konzentration des Agrobusiness mit hohem Maschineneinsatz und hohem künstlichen Düngereinsatz nicht *(Quelle: u.a. „Der Anwalt der Hungernden“ in Die ZEIT vom 4.3.2010).* Lkw's, die Nahrung aus dem Land heraus befördern, begegnen Lkw's, die Hilfelieferungen von Nahrung ins Land bringen.

Die Grenzen dieses Modells liegen in den Annahmen, die in dem obigen Flussdiagramm zu sehen sind. Denkbar wären auch noch andere Wechselwirkungs-Kopplungen, in denen z.B. auch noch die Umweltproblematik mit berücksichtigt werden könnte.

Eine vollständige Lösung zur dynamischen Modellierung mit Verlinkungen auf das reale Problem sowie auf die erwerbbaren Kompetenzen und die interaktiven ExcelTabellen kann in MMM auf Seite ma1328.htm eingesehen werden.

Eine mögliche Lösung zur funktionalen Modellierung ebenfalls mit Verlinkungen auf das reale Problem sowie auf die erwerbbaren Kompetenzen und die interaktiven ExcelTabellen kann in MMM auf Seite ma1336.htm eingesehen werden oder in der Schrift „Funktionale Modellierung“ im Kapitel 7 nachgelesen werden.

7.7 Energiebedarf der Menschheit immer noch wachsend! – Aber: humanverträgliche und klimafreundliche Energieumwandlung?

Zu diesem realen Problem siehe zunächst das Kapitel 5 in dieser Schrift. Natürlich kann das dortige Modell auch selbstreguliert so erweitert werden, dass die Umweltproblematik noch deutlicher wird (siehe z.B. Literaturverzeichnis, H. Bossel, 2004).

7.7.1 Wortmodell zum Überhang von Kohlendioxid in der Atmosphäre

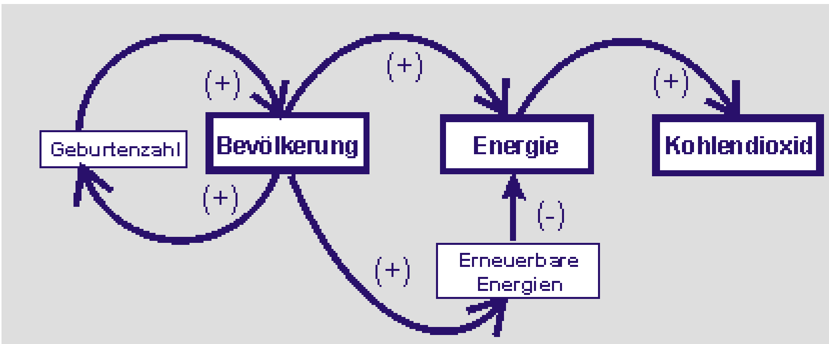
Grüne Pflanzen sind in der Lage, Kohlendioxid aus der Luft und aus den Gewässern zu assimilieren und ihn in Kohlenhydrate umzubauen. Lichtenergie und Chlorophyll sind dabei notwendige Bedingungen. Werden fossile Energieträger verbrannt, so entsteht bei ausreichendem

Sauerstoff wieder Kohlendioxid. Der Kreislauf des Kohlendioxids ist geschlossen. Mehr dazu in MMM auf der Seite „Kohlenstoff, der natürliche Kreislauf von Kohlendioxid und die „Klimaglocke Erde“ (ma0554.htm).

Wird in Zeiträumen mehr Biomasse verbrannt, als durch Photosynthese in dieser Zeit entstanden ist, so gibt es in der Atmosphäre einen Überhang an ausgestoßenem Kohlendioxid. Dieser Überhang lag vor der Industrialisierung noch bei etwa 280 ppm. Er stieg bis heute auf 381 ppm an. Und der Kohlenstofffluss in die Atmosphäre wächst jährlich weiter um etwa 1,5%. Durch Verbrennen von fossilen Brennstoffen in Wärmekraftwerken werden jährlich ca. 32 Mrd. Tonnen CO2 emittiert, von denen etwa die Hälfte in der Atmosphäre verbleibt. Die Ozeane entziehen der Atmosphäre schätzungsweise 5,5 bis 9,5 Mrd. Tonnen CO2. Dort wird es zum Teil auch wieder gelagert. (Quelle der Zahlen: BINE bildungsinfo 3.)

7.7.2 Darstellung der Wechselwirkungen von Bevölkerung, Energie und Kohlendioxid in einem Wirkungsdiagramm unter der Annahme, dass schließlich nur noch Erneuerbare_ Energien zur Energiegewinnung genutzt werden.

Das im Kapitel 5.2.1 dargestellte Wirkungsdiagramm bleibt im Wesentlichen erhalten, wird aber in anderer Weise ergänzt als in 5.3.1. Jetzt wird angenommen, dass die Erneuerbaren_ Energien rückgekoppelt zum Wachsen der gesellschaftlich geforderten Gesamtenergie zunehmen und die Fossilen_Energien ersetzen. Je mehr erneuerbare Energien verfügbar sind, desto weniger fossile Energien müssen noch umgewandelt werden. Und nur die verbleibenden fossilen Energien wirken dann noch positiv auf ein Anwachsen des Kohlendioxids in der Atmosphäre. Ein mögliches Wirkungsdiagramm kann wie folgt aussehen.

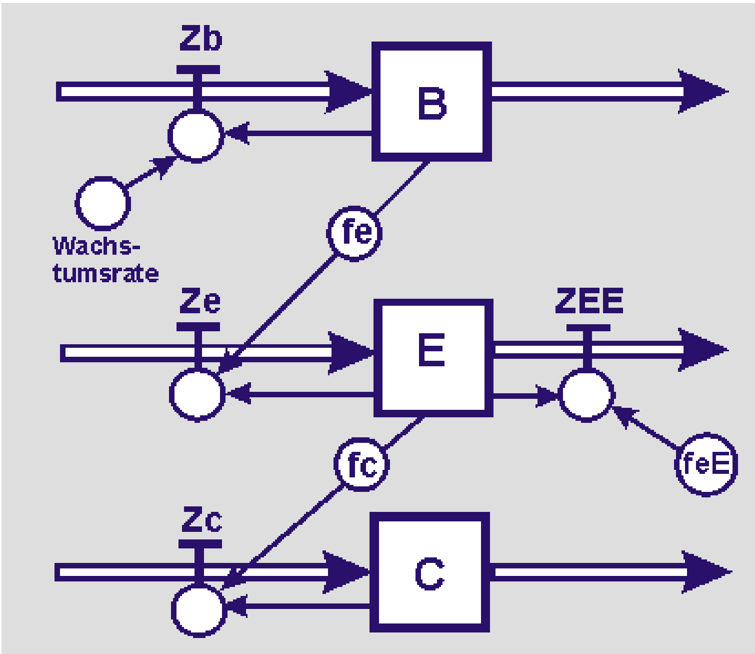


Auch dieses Wirkungsdiagramm beschreibt die Abhängigkeiten in qualitativer Form. Es wird mit dem Minuszeichen oder mit „je desto“ argumentiert.

7.7.3 Beschreibung der Dynamik in einem Flussdiagramm

Bei der Übertragung des Wirkungsdiagramms in ein Flussdiagramm wird überlegt, welche Flussgrößen und Faktoren zusätzlich zu dem in Kapitel 5.2.2 behandelten Modell abstrahiert werden können.

Auf die „Gesamt_Energie“ (**E**) wirkt jetzt gewissermaßen als „Sterbezahl“ die Flussgröße „Zunahme_Erneuerbare_Energien“ (**ZEE**) mit einem Faktor (**feE**). ZEE quantifiziert - qua Rückkopplung - den wachsenden Anteil an erneuerbare Energien, der von der Gesamtenergie (**E**) subtrahiert wird. Als Gesamtenergie bleiben dann gewissermaßen nur die abnehmenden fossilen Energien übrig, weil in diesem Modell nur zwischen erneuerbaren und fossilen Energien unterschieden wird.



7.7.4 Beschreibung des Modells durch Zustands- und Modellgleichungen

Die folgenden Zustands- und Modellgleichungen lassen sich aus dem Flussdiagramm erschließen. Das Modell wird quantifiziert indem alle Größen mit Zahlen belegt werden.

B_neu ← B_alt + Δt * Zb; Anfangsgröße **B = 7 Milliarden;**

E_neu ← E_alt + Δt * (Ze - ZEE); Anfangsgröße **E = 18 GWh;**

C_neu ← C_alt + Δt * Zc; Anfangsgröße **C =3,81 * 10^2 ppm;**

Δt = 1 (Interpretation: 1 Zeittakt = 1 Jahr)

Zb = r * B; r = 0,01

Ze = fe * B; fe = 0,01

ZEE = feE * E; feE= 0,1

Zc = fc * E; fc = 0,005

Zur Bestimmung der Anfangsgrößen und der Wachstumsziffer der Erdbevölkerung sowie zur Abschätzung der Binde-Faktoren wird auf die folgenden Sachinformationen verwiesen:

- Wachstum der Weltbevölkerung (ma0154.htm),
- Energie-"Verbrauch" (ma0534a.htm),
- Energiegewinnung aus fossilen Energieträgern (ma0535.htm) sowie
- Ausstoß von Kohlendioxid (ma0535a.htm).

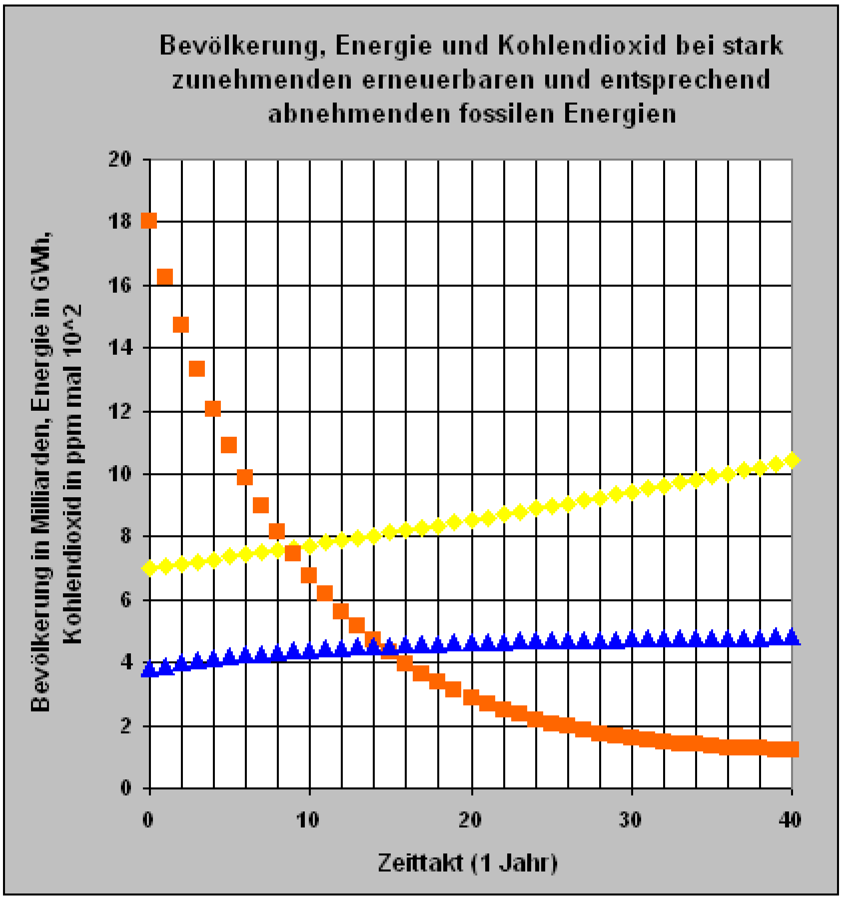
Die beiden Binde-Faktoren **fe** und **fc** hängen vom Zweck des Modells ab, eine Grundeinsicht oder Grunderkenntnis zu vermitteln. Wobei **feE** als fiktive Größe so bestimmt ist, dass nach etwa 30 Jahren fast keine fossilen Energien mehr umgewandelt werden.

7.7.5 Programmierung der Zustands- und Modellgleichungen mit Excel

Zeit-takt Jahre	Δt	r	Zb	B in Milliard.	fe	Ze	feE	ZEE	E in GWh	fc	Zc	C in ppm mal 10^2
0	1	0,01		7	0,01		0,1		18	0,005		3,81
1	1	0,01	0,07	7,07	0,01	0,07	0,1	1,8	16,27	0,005	0,09	3,9
2	1	0,01	0,0707	7,1407	0,01	0,0707	0,1	1,627	14,7137	0,005	0,0814	3,9814
3	1	0,01	0,0714	7,2121	0,01	0,0714	0,1	1,4714	13,3137	0,005	0,0736	4,055
4	1	0,01	0,0721	7,2842	0,01	0,0721	0,1	1,3314	12,0544	0,005	0,0666	4,1216
5	1	0,01	0,0728	7,357	0,01	0,0728	0,1	1,2054	10,9218	0,005	0,0603	4,1819
6	1	0,01	0,0736	7,4306	0,01	0,0736	0,1	1,0922	9,9032	0,005	0,0546	4,2365
7	1	0,01	0,0743	7,5049	0,01	0,0743	0,1	0,9903	8,9872	0,005	0,0495	4,286
8	1	0,01	0,075	7,5799	0,01	0,075	0,1	0,8987	8,1635	0,005	0,0449	4,3309
9	1	0,01	0,0758	7,6557	0,01	0,0758	0,1	0,8164	7,4229	0,005	0,0408	4,3717
10	1	0,01	0,0766	7,7323	0,01	0,0766	0,1	0,7423	6,7572	0,005	0,0371	4,4088

Die Tabelle zeigt einen Ausschnitt aus der programmierten Excel-Tabelle. Die Werte sind auf vier Stellen nach dem Komma gerundet.

7.7.6 Simulation des Modells



blau = Kohlendioxid; rot = Energie; gelb = Bevölkerung

Weitere Simulationen sind möglich, indem die stärker grau unterlegten Werte geändert werden.

7.7.7 Verhaltensbeschreibung, Interpretation, Zweck und Grenzen des Modells

Der Kohlendioxidgehalt in der Atmosphäre wächst zunächst weiter und nähert sich einem hohen Grenzwert, selbst dann, wenn sich „die Staaten der Welt in vorbildlicher Manier einigten, ihre Emissionen auf den Stand von 1990 oder früher zurückzufahren. ... Der CO2-Gehalt in der Luft würde damit aber noch nicht gesenkt ... Die Temperatur folgt wiederum der Konzentration mit einer gehörigen Verzögerung, die Jahrzehnte beträgt. Jene Erwärmung, die wir heute beobachten, ist nicht das Ergebnis heutiger Emissionen, sondern ein Erbe der Vergangenheit. ... Und die Erwärmung der Erde geht weiter, global durchschnittlich um 1,8 bis 4 Grad Celsius bis zum Jahr 2100. Diese Erwärmung lässt sich wahrscheinlich nicht aufhalten, wohl aber verlangsamen: Dazu muss u.a. der Ausstoß an Kohlendioxid in den nächsten 150 Jahren auf 25 % des heutigen Standes reduziert werden.“ (Zitat: DIE ZEIT, vom 4.3.2010).

7.7.8 Wortmodell zur Vision einer humanverträglichen und klimafreundlichen Energieumwandlung

Dazu werden zurzeit u.a. zwei Szenarien (ma0556a.htm) diskutiert:

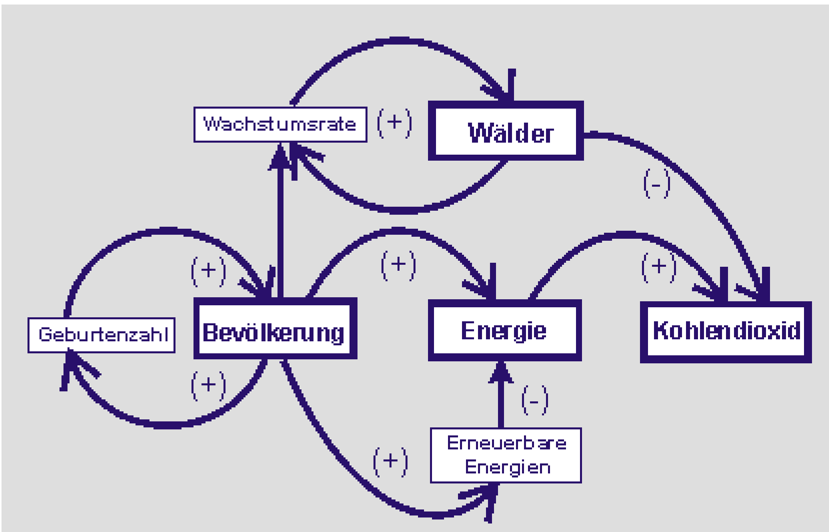
- Abbau von CO2 durch Bindung von CO2 u.a. durch künstlich erzeugte Algenblüten in den Weltmeeren oder
- Abbau von CO2 durch Erhöhung der Photosynthese in „grünen Pflanzen“ auf dem Land, also etwa durch Wiederaufforstung und Anbau von Wäldern.

Beide Szenarien entsprechen dem Wunsch, sich dem natürlichen Kreislauf von Kohlendioxid (ma0554.htm) wieder anzunähern.

„Trotz der hohen Unsicherheiten und des Widerstandes von einigen Vertragsstaaten wurde auf der Klimakonferenz in Bonn im Jahre 2009 beschlossen, Senkenprojekte (u.a. grüne Wälder) für Kohlendioxid bei der Erfüllung der Verpflichtungen einzubeziehen“ (Wikipedia).

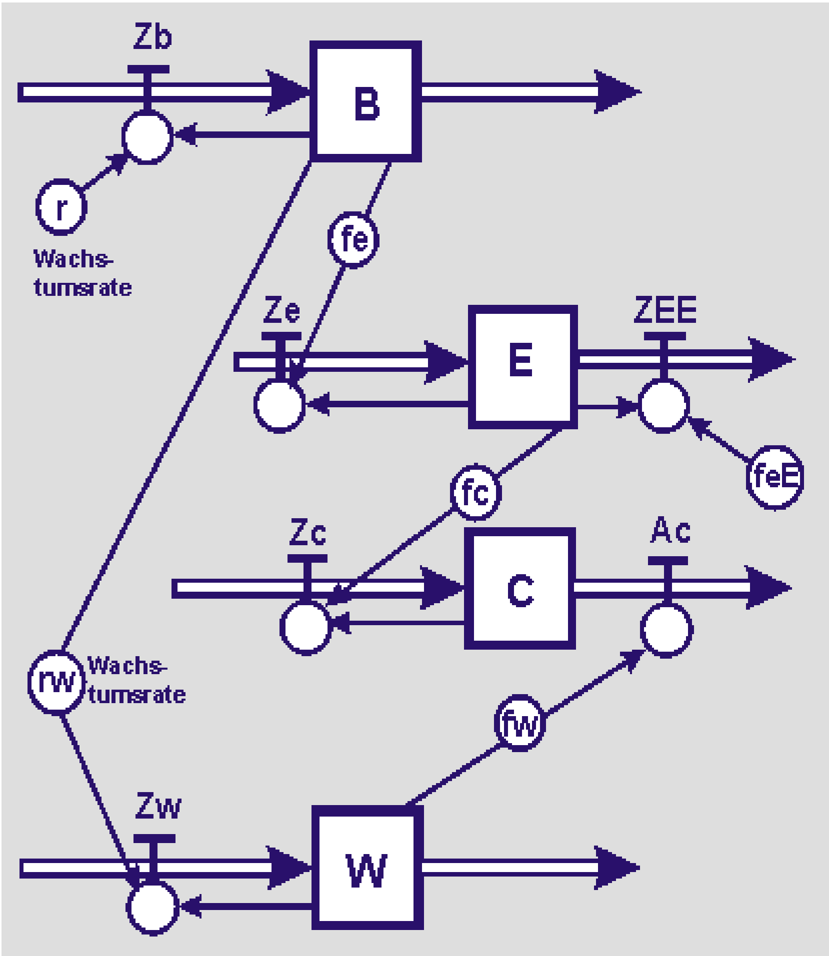
7.7.9 Ein mögliches Wirkungsdiagramm zu dieser Vision

Das obige Wirkungsdiagramm wird ergänzt. Die Fossilen_Energien werden zunehmend durch Erneuerbare_Energien ersetzen und es werden alle abgeholzten Wälder wieder aufgeforstet und neue Wälder gepflanzt. Das Wachstum der Wälder wird als rückgekoppelt angenommen. Denn je mehr Wälder die Menschen in Funktion sehen, umso stärker wird ihr Wunsch, mehr Wälder anzupflanzen. Und: Je mehr Wälder dann im natürlichen Kreislauf des Kohlendioxids vorhanden sind, umso mehr Kohlendioxid wird abgebaut. Ein mögliches Wirkungsdiagramm kann dann wie folgt aussehen.



7.7.10 Beschreibung der Dynamik in einem Flussdiagramm

Zum obigen Flussdiagramm kommt im folgenden möglichen Flussdiagramm nun eine weitere Zustandsgröße **W** (Wälder) hinzu. Das ist die Annahme im vorstehenden Wirkungsdiagramm. Auf **W** wirkt eine Flussgröße **Zw**, die auf der Grundlage zunehmender Bildung in der wachsenden Welt-Bevölkerung beruht und von einem Wachstumsfaktor **rw** abhängig ist. Das zunehmende „Grün“ der Wälder wirkt über einen Faktor **fw** abnehmend auf das bisher in die Atmosphäre eingebrachte Kohlendioxid.



7.7.11 Beschreibung des visionären Modells durch Zustands- und Modellgleichungen

Die folgenden Zustands- und Modellgleichungen lassen sich aus dem Flussdiagramm erschließen. Das Modell wird quantifiziert indem alle Größen mit Zahlen belegt werden.

B_neu ← B_alt + Δt * Zb; Anfangsgröße **B = 7 Milliarden;**

E_neu ← E_alt + Δt * (Ze - ZEE); Anfangsgröße **E = 18 GWh;**

C_neu ← C_alt + Δt * (Zc - Ac); Anfangsgröße **C =3,81 * 10^2 ppm;**

W_neu ← W_alt + Δt * Zw; Anfangsgröße **W = 40 Millionen qkm.**

Δt = 1 (Interpretation: 1 Zeittakt = 1 Jahr)

Zb = r * B; r = 0,01

Ze = fe * B; fe = 0,01

ZEE = feE * E; feE= 0,1

Zc = fc * E; fc = 0,005

Ac = fw * W; fw = 0,001

Zw = rw * B; rw = 0,01

Zur Bestimmung der Anfangsgrößen von B, E und C sowie der Wachstumsziffer der Erdbevölkerung und zur Abschätzung der Binde-Faktoren gilt das oben Gesagte.

Als Maßgröße für W nehmen wir die heutige weltweite Waldfläche von 40 Millionen qkm (Wikipedia, Wald). Die Wachstumsrate **rw** für Wälder und der Faktor **fw** sind aber fiktiv daran orientiert, dass die Menschheit in der Lage ist, sich selbst zu retten und klimafreundlich und humanverträglich zu handeln.

7.7.12 Programmierung der Zustands- und Modellgleichungen mit Excel

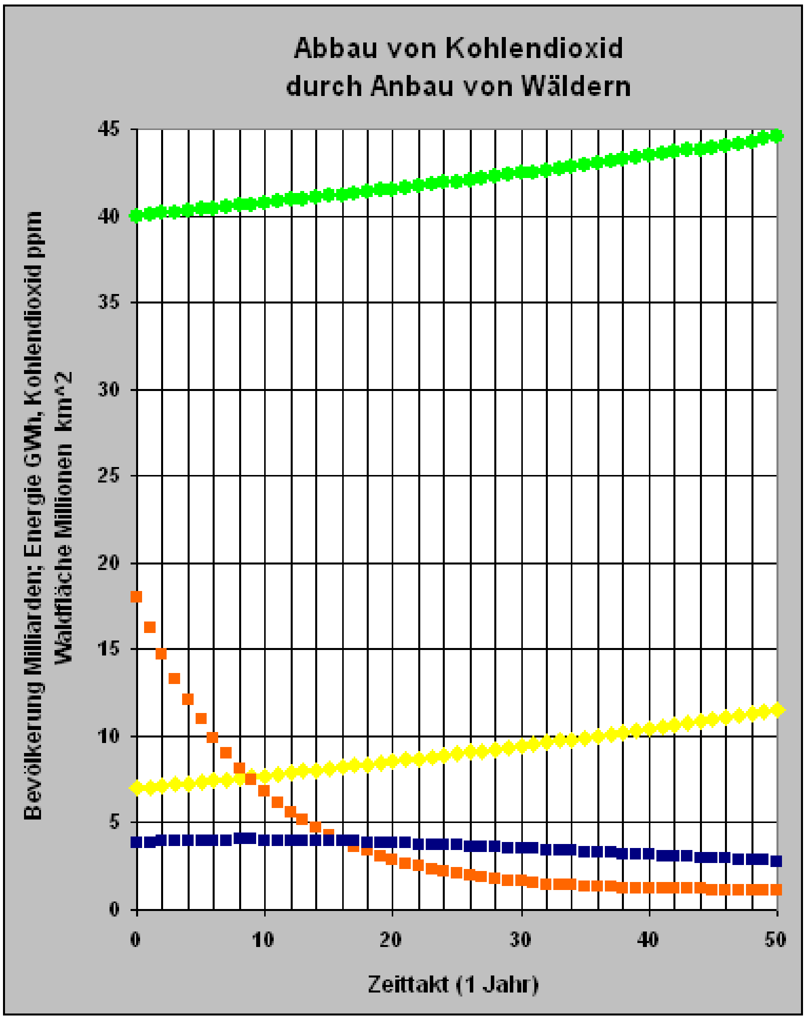
Die Zustands- und Modellgleichungen lassen sich in einer Excel-Tabelle programmieren. Die Werte sind auf vier Stellen nach dem Komma gerundet.

Zeittakt Jahre	Δt	r	Zb	B in Milliarden	fe	Ze	feE	ZEE	E in GWh
0	1	0,01		7	0,01		0,1		18
1	1	0,01	0,07	7,07	0,01	0,07	0,1	1,8	16,27
2	1	0,01	0,0707	7,1407	0,01	0,0707	0,1	1,627	14,7137
3	1	0,01	0,0714	7,2121	0,01	0,0714	0,1	1,4714	13,3137
4	1	0,01	0,0721	7,2842	0,01	0,0721	0,1	1,3314	12,0544
5	1	0,01	0,0728	7,357	0,01	0,0728	0,1	1,2054	10,9218
6	1	0,01	0,0736	7,4306	0,01	0,0736	0,1	1,0922	9,9032
7	1	0,01	0,0743	7,5049	0,01	0,0743	0,1	0,9903	8,9872
8	1	0,01	0,075	7,5799	0,01	0,075	0,1	0,8987	8,1635
9	1	0,01	0,0758	7,6557	0,01	0,0758	0,1	0,8164	7,4229
10	1	0,01	0,0766	7,7323	0,01	0,0766	0,1	0,7423	6,7572

Fortsetzung der Tabelle:

fc	Zc	fw	Ac	C in ppm mal 10^2	rw	Zw	W in Mill km^2
0,005		0,001		3,81	0,01		40
0,005	0,09	0,001	0,04	3,86	0,01	0,07	40,07
0,005	0,0814	0,001	0,0401	3,9013	0,01	0,0707	40,1407
0,005	0,0736	0,001	0,0401	3,9348	0,01	0,0714	40,2121
0,005	0,0666	0,001	0,0402	3,9612	0,01	0,0721	40,2842
0,005	0,0603	0,001	0,0403	3,9812	0,01	0,0728	40,357
0,005	0,0546	0,001	0,0404	3,9954	0,01	0,0736	40,4306
0,005	0,0495	0,001	0,0404	4,0045	0,01	0,0743	40,5049
0,005	0,0449	0,001	0,0405	4,0089	0,01	0,075	40,5799
0,005	0,0408	0,001	0,0406	4,0091	0,01	0,0758	40,6557
0,005	0,0371	0,001	0,0407	4,0055	0,01	0,0766	40,7323

7.7.13 Simulation des Modells



7.7.14 Verhaltensbeschreibung, Interpretation, Zweck und Grenzen des Modells

Zum Bevölkerungswachstum und zum Wachstum der Energieumwandlung siehe die Beschreibung zum vorhergehend interpretierten Modell.

In diesem visionären Modell steigt die Fläche der Wälder im Zeitraum von 50 Jahren von 40 Millionen km² auf rund 44,5 Millionen km². (Zum Vergleich: Deutschland hat eine Landfläche von 349.223 km² ≈ 0,35 Millionen km²). Würden also in den nächsten 50 Jahren alle 10 Jahre 0,9 Millionen km² Wald auf der Erde hinzukommen, so würde bei den obigen Annahmen und einer einsichtsfähig handelnden Gesellschaft der Kohlendioxidgehalt in der Atmosphäre von rund 380 ppm wieder auf rund 280 ppm sinken können. Und das wäre der CO2 Gehalt in der Atmosphäre vor der Industrialisierung, also der natürliche Kreislauf von CO2.

Die **Grenze dieses Modell** zeigt sich darin, dass das hier angenommene Wachstum von Wäldern unrealistisch ist, weshalb es höchstens als Konstante (also ohne Rückkopplung) angenommen werden sollte. Möglich ist es auch, den Faktor rw als Zeitfunktion anzunehmen. Unter diesen Annahmen wären aber weitere CO2 abbauende Maßnahmen in das Modell einzubauen, wenn eine klimafreundliche Vision modelliert werden soll. Diese weiteren möglichen Modellierungen unterbleiben hier, sie können aber selbstständig durchgeführt werden.

Der **Zweck dieses Modells** ist aber auch schon mit der vorstehenden Modellierung erreicht. Denn es kann erkannt werden, dass die Menschheit in der Lage wäre/ist, ihre selbstverschuldete Klimaverschlechterung mindestens zu bremsen.

Eine vollständige Lösung zur dynamischen Modellierung mit Verlinkungen auf das reale Problem sowie auf die erwerbbaren Kompetenzen und die interaktiven ExcelTabellen kann in MMM auf Seite ma1159.htm eingesehen werden.

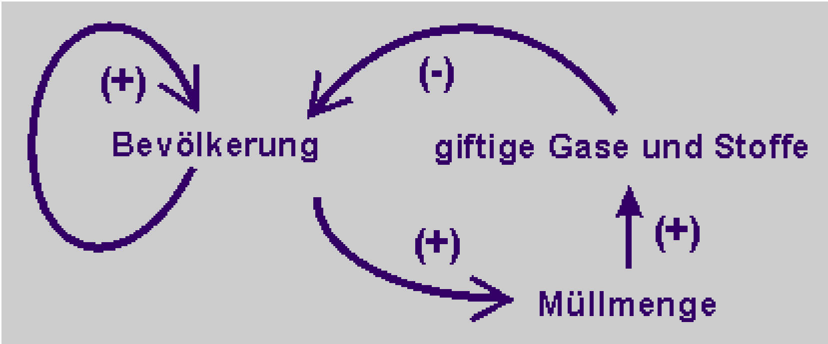
Eine mögliche Lösung zur funktionalen Modellierung ebenfalls mit Verlinkungen auf das reale Problem sowie auf die erwerbbaren Kompetenzen und die interaktiven ExcelTabellen kann in MMM auf Seite ma1556.htm eingesehen werden oder in der Schrift „Funktionale Modellierung" im Kapitel 7 nachgelesen werden.

7.8 Selbstvergiftungen an Müll oder nachhaltiges Müllmanagement?

Mit dem Wachsen der Bevölkerung nimmt naturgemäß die Müllmenge zu. Denn je mehr Menschen leben, desto mehr Abfall entsteht. Aus dem Müll, wohin er auch gerät (in die Ozeane, in Müllverbrennungsanlagen, in Recyclingwerken), entweichen Stoffe, die vergiftend auf Mensch und Tier wirken. Und in Tieren (etwa in Fischen im Meer) sammeln sich außerdem Schadstoffe an, die in die Nahrungskette des Menschen geraten und dann „giftig" wirken.

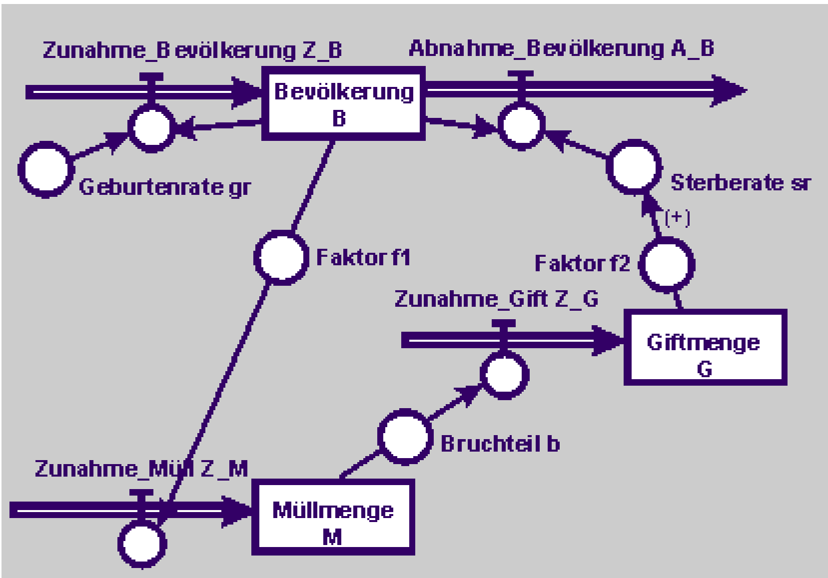
Das „Gift aus dem Müll" wirkt schließlich auf die Sterblichkeit, also auf die Todesfälle von Menschen zurück. Je mehr Gift frei gesetzt wird, desto größer wird die Sterberate der Menschen sein (siehe in MMM auch Seite ma0942.htm). Diese Dynamik lässt sich in dem folgenden Wirkungsdiagramm wie folgt in einem ersten Schritt aggregieren.

7.8.1 Beschreibung eines Zusammenhanges im Wirkungsdiagramm



Bevölkerung (**B**), Müllmenge (**M**) und Giftstoffe (**G**) werden im folgenden Flussdiagramm als Zustandsgrößen betrachtet. Das Wachstum der Bevölkerung wird mit den Flussgrößen Zunahme_Bevölkerung (**Z_B**) und Abnahme_Bevölkerung (**A_B**) modelliert. Auf die Flussgrößen wirken die Geburtenrate **gr** und die Sterberate **sr**. Die Sterberate erhöht sich aber additiv durch die Giftmenge. Die Müllmenge ist mit einem Faktor **f1** an die Bevölkerung und die Giftmenge ist mit einem Bruchteil **b** an die Müllmenge gekoppelt. Als Giftmenge wird die Masse des Sondermülls genommen. Ein Teil davon (Faktor **f2**) erhöht die Sterberate. (Zur Begrifflichkeit siehe „Wachstumszahlen, -Ziffern und -Raten ...“; ma2905.htm).

7.8.2 Beschreibung der Dynamik in einem Flussdiagramm



7.8.3 Beschreibung des Modells durch Zustands- und weitere Modellgleichungen

Mittels Recherchen und Hoch- und Mittelwertrechnungen werden die Raten, Faktoren und Anfangsgrößen auf eine nahezu (?) realistische Zahl für die Welt eingeschätzt.

B_neu ← B_alt + Δt * (Z_B - A_B); Anfangsgröße **B = 6,8** Milliarden

M_neu ← M_alt + Δt * Z_M; Anfangsgröße **M = 2,1** Milliarden Tonnen

G_neu ← G_alt + Δt * Z_G; Anfangsgröße **G = 3** Milliarden g

Δt = 1 (Interpretation: 1 Zeitakt = 1 Jahr)

Z_B = B * gr; gr = 0,035

A_B = B *[sr + (G * f2)]; sr = 0,022; f2 = 0,0015

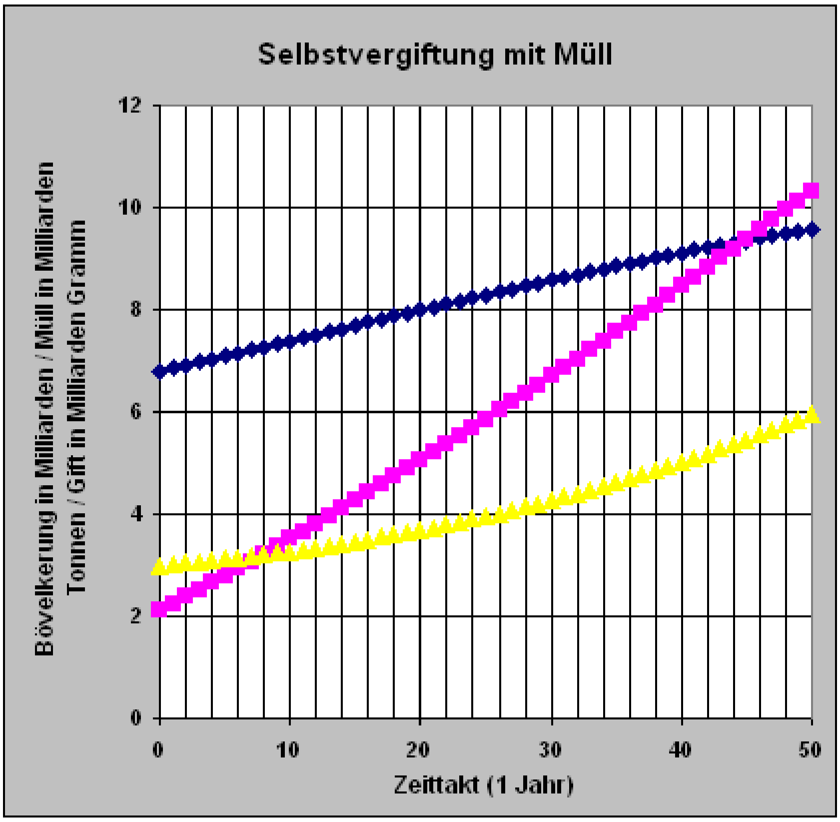
Z_M = B * f1; f1 = 0,02

Z_G = M * b; b = 0,01

7.8.4 Programmierung der Modellgleichungen für die Weltsituation

Zeit-takt												Miliarden	Mil-liar-den t	Milli-arden g
Jah-re	Δt	gr	sr	f1	f2	b	Z_B	G*f2	A_B	Z_M	Z_G	B	M	G
0	1	0,035	0,022	0,02	0,0015	0,01						6,8	2,1	3
1	1	0,035	0,022	0,02	0,0015	0,01	0,238	0,0045	0,18	0,136	0,021	6,858	2,236	3,021
2	1	0,035	0,022	0,02	0,0015	0,01	0,24	0,00453	0,182	0,137	0,0224	6,916	2,373	3,0434
3	1	0,035	0,022	0,02	0,0015	0,01	0,242	0,00457	0,184	0,138	0,0237	6,974	2,511	3,0671
4	1	0,035	0,022	0,02	0,0015	0,01	0,244	0,0046	0,186	0,139	0,0251	7,032	2,65	3,0922
5	1	0,035	0,022	0,02	0,0015	0,01	0,246	0,00464	0,187	0,141	0,0265	7,091	2,791	3,1187
6	1	0,035	0,022	0,02	0,0015	0,01	0,248	0,00468	0,189	0,142	0,0279	7,15	2,933	3,1466
7	1	0,035	0,022	0,02	0,0015	0,01	0,25	0,00472	0,191	0,143	0,0293	7,209	3,076	3,1759
8	1	0,035	0,022	0,02	0,0015	0,01	0,252	0,00476	0,193	0,144	0,0308	7,268	3,22	3,2067
9	1	0,035	0,022	0,02	0,0015	0,01	0,254	0,00481	0,195	0,145	0,0322	7,327	3,365	3,2389
10	1	0,035	0,022	0,02	0,0015	0,01	0,256	0,00486	0,197	0,147	0,0337	7,386	3,512	3,2726

7.8.5 Simulationen des Modells für die Weltsituation



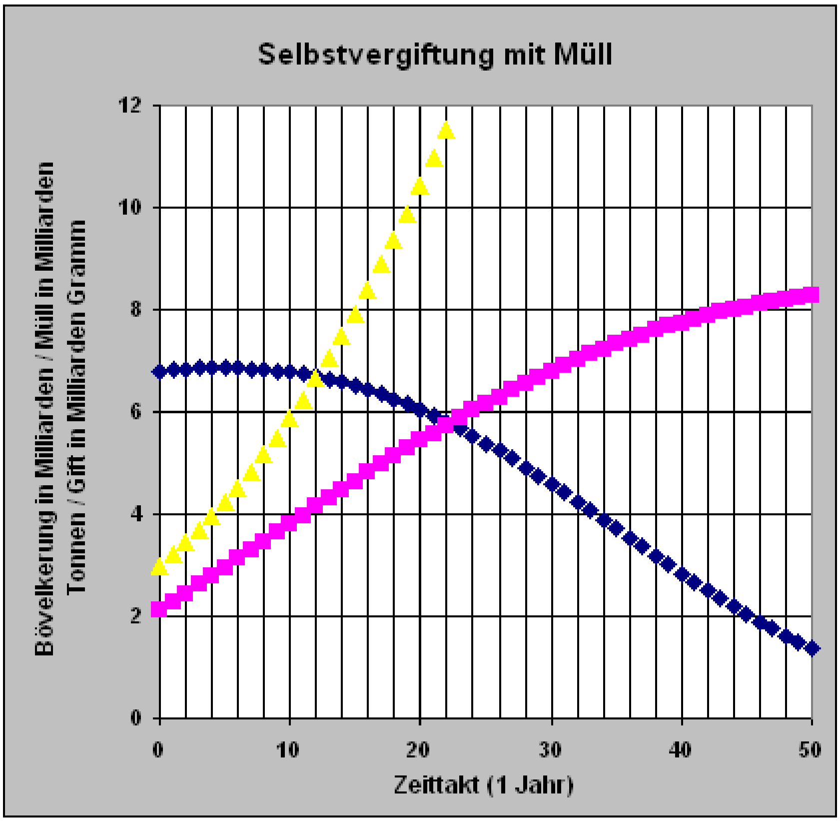
Aber die Giftmüllkippe „Dritte Welt“ sieht anders aus:

Chemieabfälle, Elektroschrott, ausrangierte Schiffe: Was die reichen Industrieländer nicht mehr gebrauchen können, wird im armen Süden entsorgt. „Andreas Bernstorff kann Geschichten erzählen, die stinken zum Himmel. Sie handeln von rostigen Fässern, aus denen schleimige Flüssigkeiten sickern, von Dämpfen, die Luftröhre und Lunge verätzen und von skrupellosen Geschäftsleuten, die sich mit giftigem Dreck eine goldene Nase verdient haben und sie spielen alle in Afrika. ...“ (Steffen Leidel, DIE ZEIT 39/2006).

Annahmen für eine Simulation der Giftmüllkippe „Dritte Welt“:

Die Wachstumsraten werden der Subsahara-Zone nachempfunden (siehe in MMM die Seite ma1328.htm). Der Anteil an Müll f1 vergrößert sich, der Anteil des Giftmülls f2 verdoppelt sich und der Anteil f2 der letal wirkenden Stoffe verzehnfacht sich.

$$gr = 0{,}041 \;\wedge\; sr = 0{,}029 \;\wedge\; f1 = 0{,}025 \;\wedge\; f2 = 0{,}003 \;\wedge\; b = 0{,}1$$



7.8.6 Verhaltensbeschreibung, Interpretation, Zweck und Grenzen des Modells

Die Müllmenge steigt mit der Bevölkerungszahl an. Aber die Wirkung der letal wirkenden Stoffe im Müll ist insgesamt auf die Weltbevölkerung bezogen nur wenig zu spüren. Die Bevölkerung steigt von 6,8 Milliarden in den nächsten 50 Jahren auf rund 9,5 Milliarden an.

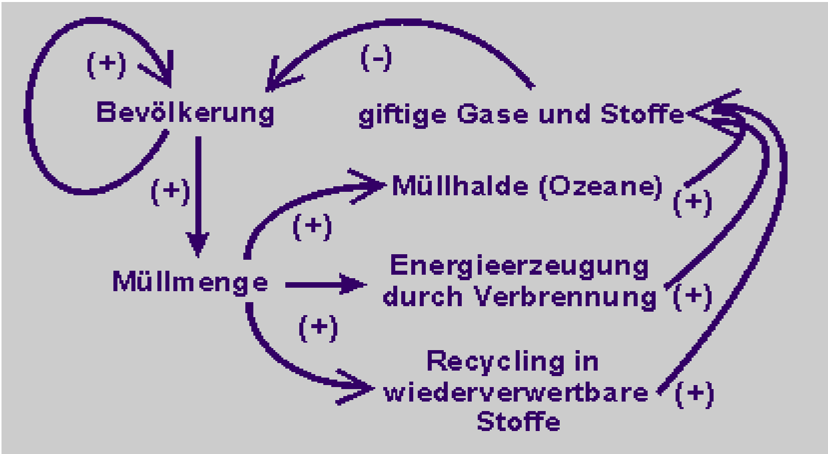
In den Ländern der Dritten Welt sieht das ganz anders aus. Die Müllmenge steigt insbesondere durch die Ausfuhr von „giftigem“ Müll aus den Industrieländern weiter an. Und damit nehmen auch die letal wirkenden Stoffe in diesen Ländern zu. Auf längere Sicht nimmt damit die Bevölkerung ab.

Durch die Verschiffung von Giftmüll in Länder der „Dritten“ Welt ist das Müllproblem also nicht nachhaltig und auch nicht human zu lösen. Diese qualitative Einsicht kann der Zweck dieser Modellierung sein.

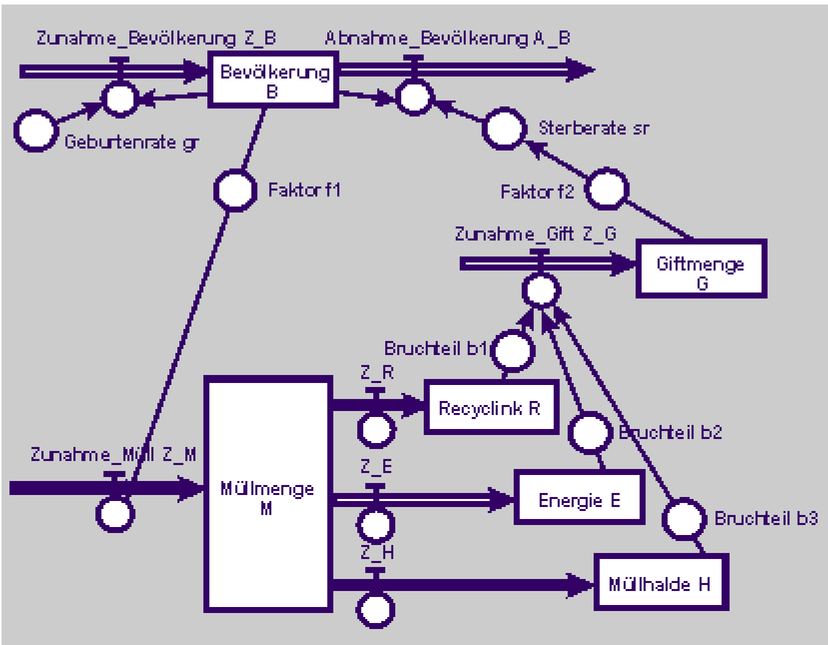
Natürlich fragt man sich jetzt, wie denn das Problem gelöst werden kann. Diese Frage führt zu weiteren Modellierungen.

Mit dem Wachsen der Bevölkerung nimmt die Müllmenge zu. Diese teilt sich aber durch Müllmanagement auf. Ein Teil gerät auf die Müllhalde, ein weiterer Teil wird in Müllverbrennungsanlagen verbrannt und erzeugt Energie, ein großer Teil des Plastikmülls wird recycelt und wieder verwendet. Aber sowohl die Müllhalden als auch die Fabrikanlagen erzeugen Stoffe, die auf den Menschen giftig wirken. Immer mehr neue technische Verfahren sorgen dann aber dafür, dass aus den Fabriken immer weniger Gift entweicht.

Es bleibt jedoch dabei, dass die Gesamtheit des „Giftes aus dem Müll“ auf die Sterblichkeit wirkt. Je mehr Gift frei gesetzt wird, desto größer wird die Sterberate der Menschen sein. Diese Dynamik lässt sich in einem erweiterten Wirkungsdiagramm wie folgt aggregieren:



Der Entwurf eines möglichen Flussdiagramms könnte dann wie folgt aussehen: In den Bruchteilen b1, b2 und b3 verbergen sich neue Absorptions-Technologien, die die Produktion der Giftmenge reduzieren.



Die Formulierung der Zustands- und Modellgleichungen, sowie des Festlegung der Anfangsgrößen, Raten, Faktoren und Bruchteile und auch mögliche Simulationsläufen bleiben der Selbstorganisation überlassen.

Eine vollständige Lösung zur dynamischen Modellierung mit Verlinkungen auf das reale Pro-

blem sowie auf die erwerbbaren Kompetenzen und die interaktiven ExcelTabellen kann in MMM auf [Seite ma1948.htm]() eingesehen werden.

Eine mögliche Lösung zur funktionalen Modellierung ebenfalls mit Verlinkungen auf das reale Problem sowie auf die erwerbbaren Kompetenzen und die interaktiven ExcelTabellen kann in MMM auf [Seite ma1946.htm]() eingesehen werden oder in der Schrift „Funktionale Modellierung" im Kapitel 7 nachgelesen werden.

Ausgewählte Literatur mit Kommentaren

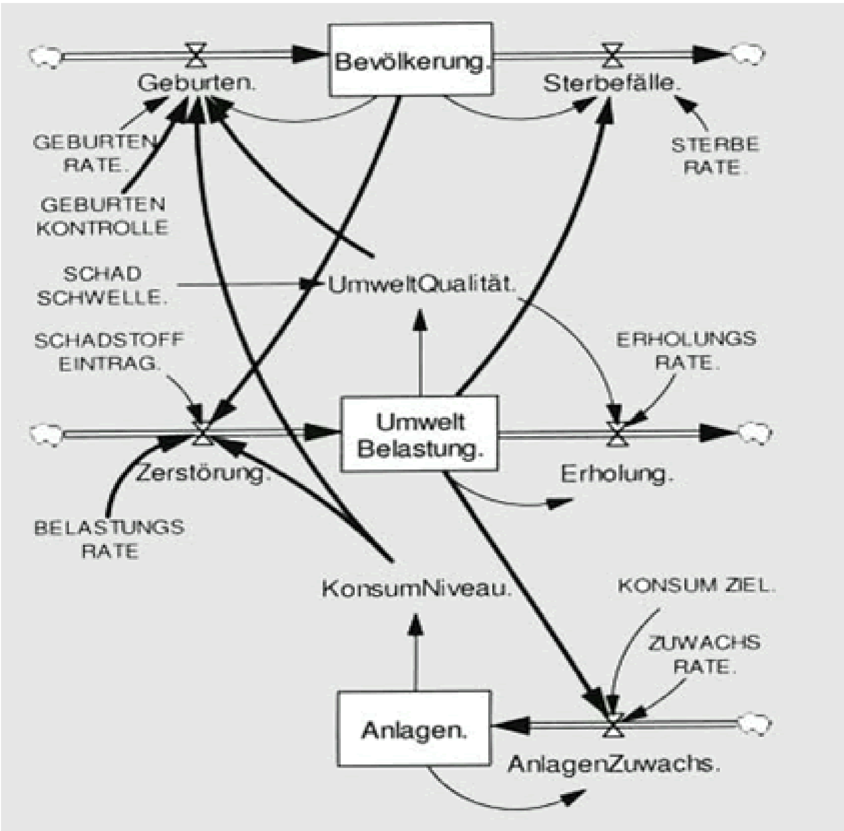
Bossel, Hartmut: Systeme, Dynamik, Simulation: Modellbildung, Analyse und Simulation komplexer Systeme; Verlag: Books on Demand GmbH; 2004.

Auch Bossel verdeutlicht zunächst die Notwendigkeit, sich mittels Modellbildung, Analyse und Simulation mit komplexen Systemen auseinander setzen zu müssen.

Er stellt dazu auf insgesamt 400 Seiten grundlegendes Wissen zur Verfügung, befasst sich mit den ersten Schritten der Modellentwicklung, der Identifizierung der Systemelemente und der verhaltensbestimmten Systemstruktur und nutzt die Grafik der system dynamics.

Der erste Schritt in der Modellbildung ist für ihn die Erstellung eines **Wirkungsgraphen** (in anderer Sprechweise: Wirkungsdiagramm). Diesem folgt die Entwicklung eines funktionsfähigen **Simulationsmodells** (in anderer Sprechweise: Flussdiagramme plus Modellgleichungen) (S. 65). Zur Gewinnung von **Zustandsgleichungen** macht er darauf aufmerksam, dass „für eine kompakte Darstellung meist auch einige mathematische Kondensationen (grobe Vereinfachungen) notwendig sind" (S. 32) und er verweist auch darauf, dass Zustandsgrößen „oft nicht eindeutig definierbar sind; d.h. verschiedene Größen im System können für eine bestimmte Zustandsgröße stehen. (S. 39).

An seinem Weltmodell **„Miniwelt"** verdeutlicht er, **wie sich Teilsysteme**, die einzeln entwickelt und getestet worden sind, **zu einem Gesamtmodell verkoppeln lassen**. Zur Verdeutlichung wird hier seine Grafik abgebildet, in der die **Verkopplung durch dicke Pfeile** verdeutlicht wird.



Angegebene Größen: Bevölkerung = 1; Umweltbelastung = 1; Anlagen = 1; Geburtenrate = 0,03; Sterberate = 0.01; Geburtenkontrolle = 1; Schadschwelle = 1; Erholungsrate = 0,02; Konsumziel = 1; Zuwachsrate = 0,05

Zu den Weltmodellen (von Forrester und Meadows) äußert sich Bossel wie folgt: „Stellen diese Modelle auch notgedrungen in vieler Hinsicht komplexe Sachverhalte in gröbster Vereinfachung dar, so kann inzwischen doch kein Zweifel mehr daran bestehen, dass sie die Entwicklung einiger wesentlicher Größen (Bevölkerung, Industrieentwicklung, Umweltbelastungen) mit einiger Verlässlichkeit richtig beschreiben können.“ (S. 65)

Bossel vertieft die **Modellentwicklung bis hin zu Grenzzyklen der Chaostheorie** und befasst sich intensiv mit den drei Grundaufgaben der Systemanalyse: der Untersuchung möglicher Systementwicklungen, der optimalen Systemlenkung und dem Systementwurf zur optimalen Erfüllung von Zielvorgaben, sowie mit den Fragen der Kriterienauswahl, Bewertung und Optimierung.

Schließlich skizziert er seinen **„Systemzoo“** (Bossel 2004), in dem etwa 100 Simulationsmodelle aus Technik, Umwelt, Wirtschaft und Gesellschaft aufbereitet sind.

„Das Buch ist geeignet als Lehrbuch für einführende Vorlesungen wie auch als Handbuch für eigenständige Projektarbeit in Schule, Hochschule oder Forschung“ (Vorwort).

Dörner, Dietrich: „Die Logik des Misslingens - Strategisches Denken in komplexen Situationen“; rororo 1989

Dieses Buch ist ebenfalls ein **Plädoyer für dynamische Modellierungen im Mathematikunterricht,** damit wir lernen in komplexen Situationen bessere und nachhaltigere Entscheidungen zu treffen.

Unser Gehirn macht in komplexen, vernetzten und dynamischen Handlungssituationen Fehler, ebenso wie beim „Denken in Wahrscheinlichkeiten“. **In komplexen Systemen denken wir an die einzelnen Knoten und vergessen das Netz.** Wir beachten nicht, dass man keine Größe im ganzen System verändern kann, ohne gleichzeitig alle anderen zu beeinflussen.

Besonders wichtig ist für ihn der Ansatz, von den „ballistischen Entscheidungen“ wegzukommen. Damit meint er Entscheidungen, die getroffen werden wie der Abschuss einer Kanone, ohne sich darum zu kümmern, wo die Kugeln eigentlich landen. Das ist nicht nur ein häufiges Phänomen bei Menschen, die Ihre eigene Kompetenz bewusst oder unbewusst bedroht sehen. Es betrifft fast jeden. Je komplexer die Situation, desto schwieriger wird es, über längere Zeiträume die Folgen von Entscheidungen in die nächsten Entscheidungsprozesse rational und wirksam wieder einzubringen.

Dietrich Dörner zeigt in „Die Logik des Misslingens“ an Beispielen aus den verschiedensten Gebieten, warum unser Denken so leicht scheitert und wie man strategisches Denken in komplexen Systemen doch methodisch anpacken und bewältigen kann.

Meadows, Dennis; Die Grenzen des Wachstums; dva 1972 . Viel mehr dazu auf der Seite ma7655.htm in MMM

Ossimitz, **Günther: Entwicklung systemischen Denkens. Theoretische Konzepte und empirische Untersuchungen; Profil Verlag, München; 2000**

Ossimitz ist seit Mitte der 80er Jahr engagiert, die Vermittlung grundlegender Kompetenzen zur Systemdynamik in der Schule zu fordern und zu fördern.

Ende der 80er Jahre gab es bereits Kontakte mit dem Landesinstitut für Schule (LSW) und Weiterbildung in Soest, das zusammen mit dem Deutschen Institut für Fernstudien (DIFF) in Tübingen die Modellbildungssoftware MODUS entwickelte, dazu passend vier Themenhefte für den Unterricht entwickelte und sie schließlich in 10. Klassen von Gymnasien, Gesamtschulen und Realschulen testete. Eckhard Klieme und Ulla Maichle haben diese Erprobung wissenschaftlich begleitet und 1991 darüber auch berichtet. Die Ergebnisse dieser Erprobung werden von Ossimitz im Kapitel 4.2 auf den Seiten 121 – 177 ausführlich dargestellt. Diese Erprobung war für ihn die Grundlage, eine eigene Studie zur Entwicklung vernetzten Denkens in Österreich durchzuführen, über die er dann ebenfalls ausführlich auf den Seiten 179 – 243 berichtet.

Im Kapitel 1 zeigt er **Wege zum systemischen Denken und Handeln** auf. Er setzt sich mit dem Ansatz von Dörner und Vester auseinander, beschreibt die Arbeiten von Forrester (industrial dynamics) und Meadows (system dynamics) am Massachusetts Institute of Technologie (MIT) sowie seine Idee für den Unterricht unter dem **Leitmotiv Systemisches Denken**, das die vier zentrale Dimensionen umfasst:

- **Vernetztes Denken: Denken in Rückkopplungskreisen**
- **Dynamisches Denken: Denken in Zeitabläufen**
- **Denken in Modellen**
- **Systemgerechtes Handeln**

Diese vier Dimensionen werden in der Folge (Seite 52 – 62) beschrieben. In darauf folgenden Kapiteln setzt er sich mit den **Darstellungsformen von Systemmodellen** (Prosamodelle, Wirkungsdiagramme, Flussdiagramme, Gleichungsdarstellung) und schließlich mit der **Systems-Dynamic-Modelliermethode** (Bestandsgrößen, Identifizierung der Bestandsgrößen, Rechenlogik, Bewegungsgrößen und Flussgrößen) auseinander und das immer an Beispielen.

Die Förderung des Systemischen Denkens findet für ihn im Mathematikunterricht aller Schulformen statt, indem es bei Lösungen nicht mehr nur um wahr und falsch sondern auch um angemessen geht. „**Meine Position ist das qualitative Modellieren**“ in einem offenen und experimentellen Mathematikunterricht. (Experimentell bezieht sich auf den Einsatz von Computerwerkzeugen.) Er sieht aber auch den dringenden Bedarf für „Lehrerfortbildungsmaßnahmen, in denen Mathematiklehrer sowohl qualitative als auch quantitative Möglichkeiten der Modellierung von Systemen“ kennen lernen und im Unterricht dann auch durchhalten müssen, sollen die grundlegenden Kompetenzen des Systemischen Denkens erreicht werden. (S. 93)

Pestel, Eduard: Jenseits der Grenzen des Wachstums, Bericht an den Club of Rome, dva 1988

Pestel geht zunächst auf die Argumente ein, die gegen das Weltmodell in „Die Grenzen des Wachstums" erhoben worden sind (S. 33f). Er macht dann aber auch darauf aufmerksam, dass es im Weltmodell darum ging, „über den Tellerrand nationaler Probleme hinweg den Blick auf die Weltproblematik zu lenken" (S. 37)... und keineswegs darum ging, Schlüsse für ein konkretes Land zu ziehen, ... sondern vielmehr darum ging, tiefere Einsichten in komplexe Zustände und Entwicklungen zu gewinnen, die jedoch keine Vorhersage ermöglichen.

„Das für die weitere Zukunft wohl wichtigste Ergebnis der Debatte bestand aber meines Erachtens darin, dass mehr und mehr Menschen sich die dringende Notwendigkeit **langfristigen, antizipatorischen Denken und Lernens** zu eigen machten, mit der Erkenntnis, dass in diesen Zeiten sich überstürzenden Wandels rein adaptives Verhalten als Reaktion auf neue Entwicklungen und Ereignisse nicht mehr ausreicht" (S 60).

Pestel schlägt als Antwort auch auf die Kritik ein neues Paradigma „organisches Wachstum und organische Entwicklung", als zielsuchendes Wachstum und differenzierte Entwicklung vor. Das Paradigma ... gewinnt erst dann einen politisch operationalen Sinn, wenn ihm ein Entwicklungsmuster zugeordnet wird, dessen Struktur durch die Formulierung von politischen, gesellschaftlichen, wirtschaftlichen, ökologischen und anderen Zielen, Aufgaben und Wegen gestaltet wird, von denen einige global oder zumindest universal, andere von Gesellschaft zu Gesellschaft verschieden sein mögen" (S. 84).

„Wer Modelle ... für die Analyse der Zukunft benutzt, die stets ... in hohem Maße mit Ungewissheiten befrachtet sind, muss sich zunächst darüber im klaren sein, welchem Zweck das Modell dienen soll: etwa der genauen Vorhersage oder der Vorausschau auf verschiedene mögliche Zukunftsentwicklungen oder nur der Gewinnung von Einsicht, die uns ein tieferes Verständnis der die Zukunft gestaltenden Kräfte zu vermitteln vermag" (S. 78).

Dem Ziel der Vorausschau versucht man dadurch gerecht zu werden, „dass man im Modell eine Reihe alternativer Annahmen macht und dann deren Folgen abschätzt oder im Falle quantitativer Modelle berechnet." (S. 79).

Frederic Vester, Die Kunst vernetzt zu Denken – Ideen und Werkzeuge für einen neuen Umgang mit Komplexität, dtv (7) 2008

Vester (1925 – 2003) war seit 19993 Mitglied des Club of Rome

Vester beklagt in seinem Buch zunächst die Angst vor Komplexität, schildert daraufhin eine neue Sicht von Wirklichkeit und sagt auch, was unsere heutige Situation erfordert. Hierzu zwei Zitate:

„Im Zeitalter hochkomplexer, miteinander vernetzter Strukturen und Vorgänge ist es somit unabdingbar, dass wir über diesen simplen linearen Ansatz hinausgehen und in unserem Denken, Planen und Handeln die vorliegende Komplexität, das heißt die vernetzten Zusammenhänge unserer Welt, nicht nur zur Kenntnis nehmen, sondern sie zu nutzen lernen, um nachhaltig, also evolutionär sinnvoll handeln zu können. ....

Das vernetzte Denken müsste in Schule und Weitebildung ab sofort einen angemessenen Platz finden. Denn in Zukunft werden diejenigen von uns, die darin nicht ausgebildet sind, mit Sicherheit noch größere Probleme haben, das Mosaik der realen Wechselwirkungen zu interpretieren und mit ihren Spielregeln zurechtzukommen.“ (S.18)

Im Gegensatz zu den allgemeinen Weltmodellen entwickelt Vester ein Instrumentarium für ein Sensitivitätsmodell, das konkrete, unmittelbar anstehende Probleme lösen hilft:

„Ein **Sensitivitätsmodell** gibt nicht nur, wie es die Modelle der Systems Dynamics tun, die Dynamik wieder, die eine Systementwicklung bestimmen, es ist auch der registrierende Seismograph, der in der Lage ist, die darin herrschende Kybernetik zu beschreiben. Dadurch dass das Verfahren die Wirkungsflüsse sichtbar werden lässt, ist es dem Anwender möglich, sie durch neue Weichenstellungen zu beeinflussen, die Systemkonstellationen durch Selbstregulation zu verbessern und mithilfe von Simulationen das entsprechende Verhalten des Systems zu hinterfragen. ....“ (S. 188)

Diese Modelle haben sehr viel Ähnlichkeit mit den von ihm entwickelten Simulationsspielen Ökolopoly (1987) oder Ecopolicy (1997) und nutzen die von ihm angebotene Software (http://www.frederic-vester.de)

Internetadressen:

Kohorst, Helmut; Portscheller, Philipp: **Modellierung und Simulation dynamischer Systeme;** ab Mitte der 90ger Jahre auf dem Bildungsserver learn-line; heute - nachdem learn-line abgeschaltet wurde - erreichbar unter kohorst-lemgo.de/modell/modsimsequenz/modsim/index.htm

Dynamische Modellierungssoftware und Links und Literatur zur dynamischen Modellierung; www.lehrer-online.de/werkzeuge-dynamische-modellierung.php

Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss; Herausgegeben vom Sekretariat der KMK Deutschland; Wolters Kluwer 2004).

Der didaktische Bildungsserver Südtirols