

# Mathematisches Denken, Begabung, Fähigkeiten, Leistung

## 1. Mathematisches Denken

Neben allgemeinen Bildungs- und Erziehungszielen strebt Mathematikunterricht insbesondere an, die fachbezogenen Denkfähigkeiten der Schüler weiterzuentwickeln. Im Kanon aller Schulfächer leistet das Fach Mathematik einen spezifischen Beitrag zur Entwicklung des Denkens. Doch was ist eigentlich „mathematisches Denken“? Betrachtet man das Gehirn als Organ des Denkens, lässt sich aus biologischer Perspektive definieren: *Mathematisches Denken bezeichnet neurobiologische Prozesse im Gehirn, die zu einer Beschäftigung mit einer mathemathikhaltigen Situation in inhaltlichem Bezug stehen.* In Hinblick auf die Gestaltung von Mathematikunterricht ist diese Definition allerdings weiter mit Inhalt zu füllen. Hierzu hilft es, den Begriff des mathematischen Denkens aus einer fachlichen Perspektive zu differenzieren, um ihn damit greifbarer zu machen. Abb. 1 zeigt verschiedene Facetten mathematischen Denkens und ordnet diese in drei Dimensionen.

### 1.1 Inhaltsbezogenes Denken

Mathematisches Denken vollzieht sich an mathematischen Inhalten. Über diese Inhaltsbereiche kann es klassifiziert werden:

- *Numerisches Denken:* z. B. Vorstellungen von Zahlen (natürlichen Zahlen, Bruchzahlen, negativen Zahlen, reellen Zahlen) entwickeln und nutzen, mit verschiedenen Zahlaspekten umgehen
- *Geometrisches Denken:* z. B. Begriffe und mentale Vorstellungen von ebenen Figuren und räumlichen Körpern bilden und damit operieren, räumliche Situationen und zweidimensionale Darstellungen wechselseitig ineinander transformieren, in der Vorstellung räumlich sehen und räumlich denken, mit Symmetrie operieren
- *Algebraisches Denken:* z. B. Rechengesetze erschließen und anwenden (Kommutativ-, Assoziativgesetz, ...), mit Variablen, Termen und Gleichungen umgehen
- *Stochastisches Denken:* z. B. kombinatorische Situationen durchdringen, Zufall mit Wahrscheinlichkeiten qualitativ und quantitativ erfassen, mit Statistiken umgehen
- *Funktionales Denken:* z. B. Beziehungen zwischen Ursachen und Wirkungen verstehen, mit funktionalen Zusammenhängen – d. h. mit Abhängigkeiten einer Größe von einer anderen – operieren, verschiedene Darstellungsarten einer Funktion ineinander transformieren (Funktionsterm, Graph, Wertetabelle, Verbalbeschreibung)

Diese inhaltsbezogenen Facetten mathematischen Denkens sind nicht unabhängig voneinander. Beispielsweise ist numerisches Denken eng mit geometrischem Denken verbunden, wenn man sich Zahlen als Punkte am Zahlenstrahl, als Streckenlängen oder als Vektoren vorstellt und wenn Operationen mit Zahlen durch Operationen mit diesen geometrischen Bildern visualisiert werden. Stochastisches Denken hängt mit numerischem Denken zusammen, wenn etwa das Zählprinzip der Kombinatorik als Anwendung der Multiplikation gesehen wird oder Wahrscheinlichkeiten mit Verhältnissen ausgedrückt werden.

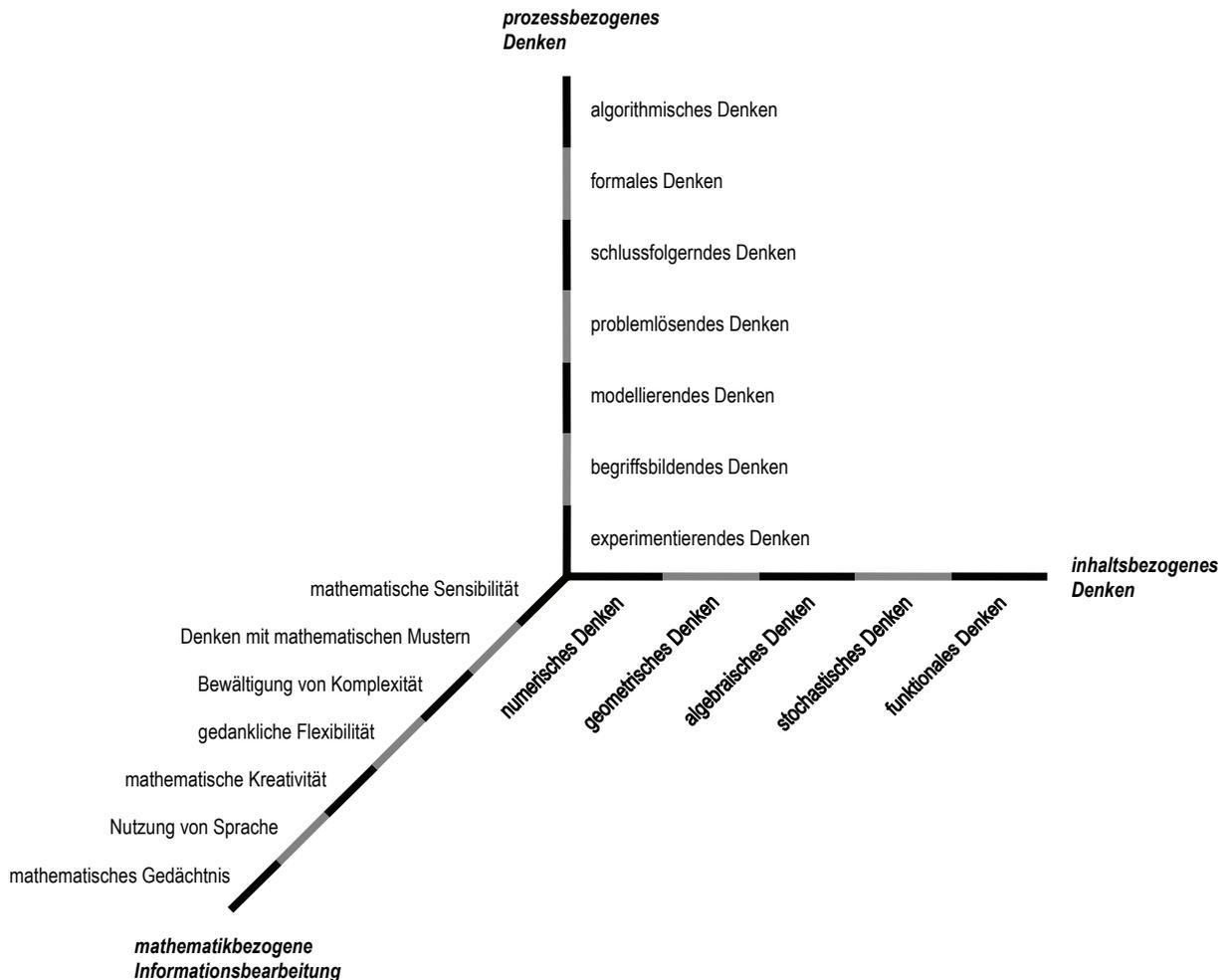


Abb. 1: Facetten mathematischen Denkens

## 1.2 Prozessbezogenes Denken

Mathematisches Arbeiten bedeutet das gedankliche Vollziehen mathematiktypischer Prozesse. Diese Arten mathematischen Tätigseins stellen eine zweite Dimension mathematischen Denkens dar:

- *Experimentierendes Denken*: z. B. mathematikhaltige Phänomene erkunden, Beispiele betrachten, Situationen variieren, Beobachtungen gedanklich strukturieren und systematisieren, explorativ gewonnene Vermutungen formulieren
- *Begriffsbildendes Denken*: z. B. aus der Analyse von Beispielen allgemeine mathematische Begriffe schaffen – etwa für Objekte wie „Kegel“, für Eigenschaften wie „punktsymmetrisch“ oder für Relationen wie „ist Teiler von“, Begriffe definieren, Objekte klassifizieren, Unter- und Oberbegriffe bilden, Begriffe vernetzen
- *Modellierendes Denken*: z. B. Sachsituationen unter mathematischen Gesichtspunkten analysieren, sie mit mathematischen Modellen beschreiben und bearbeiten, Modellergebnisse interpretieren und bewerten
- *Problemlösendes Denken*: z. B. problemhaltige Situationen bearbeiten, Problemlösestrategien wie etwa systematisches Probieren, Umstrukturieren, Rückwärtsarbeiten nutzen, Lösungen entwickeln und klar ausarbeiten
- *Schlussfolgerndes Denken*: z. B. folgerichtig argumentieren und begründen, Kausalketten von Tatsachen oder Ereignissen konstruieren oder verfolgen, Beweise und Beweisstrategien verstehen oder entwickeln
- *Formales Denken*: z. B. mit formalen Symbolen wie Ziffern oder Variablen operieren, mit mathematischen Symbolen denken, mit Formeln, Termen oder Gleichungen gedanklich operieren
- *Algorithmisches Denken*: z. B. Rechenalgorithmen wie etwa die schriftlichen Rechenverfahren nutzen, geometrische Konstruktionsverfahren anwenden, etwa zur Konstruktion einer Winkelhalbierenden

bierenden, Gleichungen mit Äquivalenzumformungen lösen, reelle Zahlen näherungsweise bestimmen (z.B. Nullstellen von Funktionen, Kreiszahl  $\pi$ , ...)

Die Prozesse mathematiktypischen Tätigseins sind nicht isoliert voneinander zu sehen, sie können bei der Beschäftigung mit Mathematik nebeneinander oder miteinander verwoben verlaufen. Beispielsweise kann eine tragfähige Begriffsbildung die Grundlage für Modellierungsprozesse darstellen, algorithmisches oder schlussfolgerndes Denken können Bestandteile von Problemlösungen sein.

### 1.3 Mathematikbezogene Informationsbearbeitung

Mathematisches Denken umfasst die Wahrnehmung, die Verarbeitung, die Speicherung und den Abruf mathematikbezogener Information. Diese auf kognitive Prozesse der Informationsbearbeitung fokussierte Sichtweise eröffnet eine dritte Dimension mathematischen Denkens:

- *Mathematische Sensibilität*: z. B. Mathematik in der Umwelt wahrnehmen, in mathemathikhaltigen Situationen Besonderes und Interessantes erkennen, Fragen aufspüren, die Struktur von Problemstellungen erfassen, mit mathematischen Objekten gefühlvoll umgehen, die ästhetische Komponente mathematischer Sachverhalte empfinden
- *Denken mit mathematischen Mustern*: z. B. in Beispielen zu Grunde liegende allgemeine Muster und Strukturen erkennen, konkrete Situationen abstrahieren, verallgemeinern, Analogien erkennen und nutzen, allgemeinen Einsichten auf Konkretes übertragen, mit Mustern operieren
- *Bewältigung von Komplexität*: z. B. relevante Informationen aus komplexen Situationen herausfiltern, Informationen strukturieren, Gedankengänge durch Denken in übergeordneten Strukturen verkürzen, gedanklich mit mehreren Objekten parallel operieren
- *Gedankliche Flexibilität*: z. B. Repräsentationsebenen wechseln (enaktiv, ikonisch, verbal, mathematisch-symbolisch), Situationen unter verschiedenen Blickwinkeln betrachten, Situationen umstrukturieren, gedankliche Prozesse umkehren
- *Mathematische Kreativität*: z. B. zu einer mathematischen Situation Ideen und Assoziationen produzieren, divergent denken, gegebene Rahmen durchbrechen, Bekanntes in origineller Weise nutzen, phantasievolle Gedankengänge entwickeln, Querverbindungen herstellen
- *Nutzung von Sprache*: z. B. mündlich oder schriftsprachlich dargestellte Situationen verstehen, Sprache zur Entwicklung und Darstellung mathematischer Überlegungen und Ergebnisse nutzen
- *Mathematisches Gedächtnis*: z. B. mathematische Situationen und Ergebnisse, Schemata von Argumentationen sowie grundsätzliche Zugänge zu Problemen merken, Neues mit vorhandenem Wissen vernetzen, Wissen flexibel und situationsadäquat abrufen

Auch hier ist die Strukturierung mathematikbezogener Informationsbearbeitungsprozesse nicht als überschneidungsfreie Einteilung zu sehen. Beispielsweise hilft das Denken mit mathematischen Mustern zur Bewältigung von Komplexität und zur effizienten Speicherung der Inhalte im Gedächtnis. Kreatives Denken kann durch Sprache angestoßen werden und wird mit Sprache kommuniziert.

Mit dieser differenzierten Konzeptualisierung mathematischen Denkens fällt es leicht, die Begriffe der mathematischen Begabung, der mathematischen Fähigkeiten und der mathematischen Leistung zu fassen.

## 2. Mathematische Begabung

*Mathematische Begabung bezeichnet das individuelle Potential zu mathematischem Denken.* Betrachten wir verschiedene Aspekte dieser Definition etwas genauer: Mathematische Begabung ist das Potential zu mathematischem Denken. Es mag also sein, dass ein Mensch zwar über ein gewisses Potential verfügt, dieses allerdings (noch) nicht zu einer Fähigkeit entwickelt ist, weil etwa die dazu notwendige Anregung durch die Umwelt nicht vorhanden war. Beispielsweise können Grundschüler ein Potential zu stochastischem Denken besitzen. Wenn sie sich jedoch weder in der Schule noch zu Hause mit stochastischen Fragestellungen befassen, werden die entsprechenden Denkfähigkeiten nicht bestmöglich entwickelt.

Mathematische Begabung ist individuell unterschiedlich ausgeprägt. Menschen unterscheiden sich in ihrem Potential zu mathematischem Denken in den in Abb. 1 dargestellten Facetten. Hohe mathematische Begabung zeichnet sich dadurch aus, dass das Denkpotehtial in vielen Facetten deutlich überdurchschnittlich ausgeprägt ist. Mit dieser differenzierten, mehrdimensionalen Sicht auf mathematische Begabung ist klar, dass dieses komplexe Phänomen auf einer eindimensionalen Skala kaum zutreffend beschrieben werden kann. Eine simple Reduktion mathematischer Begabung auf eine Zahl (wie beim IQ) wird der Komplexität der Mathematik nicht gerecht und ist für schulische Diagnose und pädagogische Fördermaßnahmen auch bei weitem nicht so hilfreich wie das hier dargestellte multiperspektivische Konzept.

## 3. Mathematische Fähigkeiten

*Mathematische Fähigkeiten bezeichnen Fähigkeiten zu mathematischem Denken.* Nach dieser Begriffsbildung bestehen die fachspezifischen Fähigkeiten eines Schülers in Mathematik genau darin, mathematisch denken zu können. Das differenzierte Modell in Abb. 1 schließt dabei inhaltsbezogenes und prozessbezogenes Denken ebenso ein wie Prozesse der Informationsbearbeitung. Es mag sich die Frage stellen, wie sich mathematisches Wissen oder Fähigkeiten zum Handeln hier einordnen. Beides ist in der Begriffsbildung für mathematische Fähigkeiten inbegriffen. Mathematisches Wissen ist integraler Bestandteil der Konzeptualisierung mathematischen Denkens – und zwar in allen drei Dimensionen in Abb. 1. Entsprechend ist auch mathematikbezogenes Handeln untrennbar mit mathematischem Denken verbunden, denn es wird durch Denken gesteuert.

Mathematische Fähigkeiten entwickeln sich durch die Beschäftigung mit Mathematik auf der Basis mathematischer Begabung (dem Fähigkeitspotential) und unter dem Einfluss einer Vielfalt von Persönlichkeits- und Umweltmerkmalen. Dies berücksichtigt das Modell in Abb. 2. Es lehnt sich an das „Münchner Hochbegabungsmodell“ von Heller an.

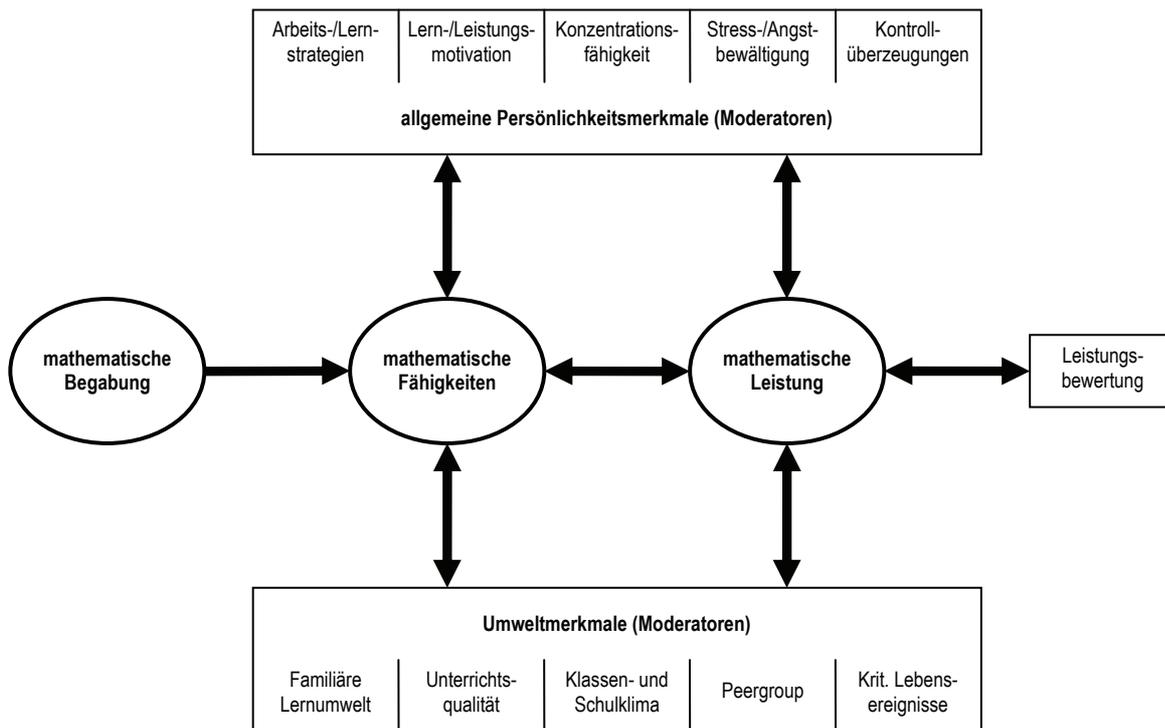


Abb. 2: Begabung, Fähigkeiten, Leistung

Ob und in welchem Ausmaß mathematische Begabung zu Fähigkeiten führt, wird zum einen durch mathematikunabhängige Merkmale der Persönlichkeit mitbestimmt. Hierzu zählen

- Strategien für persönliches Arbeiten und Lernen, Selbstorganisation, Selbstständigkeit,
- Lern- und Leistungsmotivation, Anstrengungsbereitschaft, Fleiß, Ausdauer, intellektuelle Neugier, persönliche Interessen, persönliche Zukunftsperspektiven,
- Konzentrationsfähigkeit, Fähigkeiten, die Aufmerksamkeit auf eine Situation zu fokussieren und sich in eine Sache zu vertiefen, Gründlichkeit und Genauigkeit im Denken und Tun,
- Fähigkeiten zur Bewältigung von Stress und zum Umgang mit (Prüfungs-)Angst, produktive Haltung zu Fehlern,
- Überzeugungen, inwieweit eigenes Verhalten gewünschte Ergebnisse hervorrufen kann und inwieweit sich eigene Anstrengung lohnt, Überzeugungen zur Selbstwirksamkeit sowie das Selbstkonzept der Person.

Zum anderen spielt die Umwelt eine entscheidende Rolle dafür, dass mathematische Begabung entsprechende Fähigkeiten hervorrufen kann. Diese Umweltfaktoren umfassen

- den Anregungsgehalt der häuslichen Lernumwelt, den Erziehungsstil in der Familie, häusliche Leistungsanforderungen, Reaktionen der Familie auf Erfolgs- bzw. Misserfolgsereignisse, das Familienklima,
- die Qualität des Unterrichts in Bezug auf seine vielfältigen Bildungs- und Erziehungsziele, die fachliche, didaktische, pädagogische und soziale Kompetenz der Lehrkraft,
- das Klima in der Klasse und der Schule, z. B. in Bezug auf Lernen, Leisten, sozialen Umgang, Werthaltungen,
- Einflüsse der Peergroup, Freizeitaktivitäten,
- kritische Lebensereignisse, wie etwa Schicksalsschläge oder besondere Erfolgserlebnisse.

Derartige Persönlichkeits- und Umweltmerkmale sind maßgeblich für die Art und Weise, wie sich eine Person mit Mathematik (insbesondere in der Schule) beschäftigt. Sie haben damit direkten Einfluss auf das Lernen und damit auf mathematische Fähigkeiten, aber auch auf gezeigte Leistung.

#### 4. Mathematische Leistung

*Mathematische Leistung bezeichnet geäußerte Ergebnisse mathematischen Denkens.* Bei Schülern sind dies beispielweise im Unterricht mündlich geäußerte Gedanken, Notizen im Heft bzw. auf Arbeitsblättern oder schriftliche Bearbeitungen bei Leistungserhebungen. Diese Ergebnisse sind einerseits durch individuelle Fähigkeiten und damit Begabungen bedingt, sie werden andererseits maßgeblich durch das bereits erwähnte komplexe Geflecht von Persönlichkeits- und Umweltmerkmalen beeinflusst (siehe Abb. 2).

Anerkennung können Leistungen nur in sozialen Systemen (wie etwa der Schule) erfahren, wenn die Ergebnisse des mathematischen Denkens kommuniziert und vom sozialen System bewertet werden. Dabei ist zu bedenken, dass jede Leistungsbewertung von Kriterien des sozialen Systems abhängt und damit nie völlig objektiv erfolgen kann. Was eine gute Mathematikleistung ist, bewertet in der Schule zumeist die Lehrkraft auf der Basis ihres pädagogischen Erfahrungshintergrunds, ihres persönlichen Wissens und ihres Wertesystems. Diese Leistungsbewertungen geben dem Schüler wiederum Rückmeldung und beeinflussen damit künftiges Lernen und Leisten.

#### 5. Nutzen dieses Modells in der Schule

Das hier dargestellte Modell kann sich für schulische Diagnose- und Förderzwecke als nützlich erweisen, denn es erlaubt einen differenzierten Blick auf die Phänomene „Denken“, „Begabung“, „Fähigkeiten“ und „Leistung“ im Fach Mathematik. Es macht deutlich, dass mathematische Begabung von Schülern nicht automatisch zu mathematischen Fähigkeiten führt und dass sich mathematische Fähigkeiten nicht zwingend in entsprechenden Leistungen äußern. Umgekehrt müssen hohe Leistungen nicht zwangsläufig Belege für Hochbegabung sein. Jeweils ist der vielschichtige Einfluss von Persönlichkeits- und Umweltmerkmalen mitzubedenken.

Das Modell kann damit der *Diagnostik* dienen. Schülerleistungen können entsprechend den Facetten mathematischen Denkens in Abb. 1 multiperspektivisch erfasst und unter Berücksichtigung der Einflussfaktoren gemäß Abb. 2 multikausal interpretiert werden. Hierbei stellt das Modell heraus, dass Fähigkeiten oder Begabung nie direkt beobachtet oder gemessen werden können, sondern dass jegliche Diagnose immer nur versuchen kann, über gezeigte Leistungen indirekt auf Fähigkeiten oder Begabung zurückzuschließen. Das differenzierte Konzept mathematischen Denkens eröffnet dabei einen vielschichtigen Blick auf die Fähigkeiten und Begabung von Schülern. Beispielsweise kann ein Schüler sehr gut im algorithmischen Denken sein, dagegen Probleme beim Modellieren haben; er mag etwa Stärken im geometrischen Denken und Schwächen im stochastischen Denken besitzen. Pauschale Urteile wie „Der Schüler XY ist in Mathematik schlecht.“ wirken vor diesem Hintergrund platt und fragwürdig.

Zudem kann das Modell handlungsleitend für die *Förderung von Schülern* sein – sowohl auf Individual-ebene als auch auf Klassenebene. Da die Fähigkeiten von Schülern zu mathematischem Denken differenziert betrachtet werden, kann auf dieser Basis eine gezielte individuelle Förderung ansetzen. Schüler, die beispielweise Schwächen im Bereich des funktionalen Denkens besitzen, benötigen entsprechende Lernumgebungen, um ihr Potential optimal zu entfalten. Das pädagogische Handeln in der Schule sollte aber auch die dargestellten leistungsfördernden Persönlichkeits- und Umweltmerkmale einbeziehen, damit Begabung zu bestmöglicher Leistung führt. Beispielsweise sollte auch im Mathematikunterricht auf Lernstrategien, Angstbewältigung und ein positives Klassenklima Wert gelegt werden.

Schließlich bietet das Modell Struktur und Planungshilfe für eine *Gesamtkonzeption von Mathematikunterricht* – sowohl in regulären Klassen, als auch in mathematischen Arbeitsgemeinschaften für besonders Begabte. Es hilft, mathematisches Denken in seinen vielen Facetten zu sehen und den Unterricht inhaltlich und methodisch so zu gestalten, dass die Schüler bei der Beschäftigung mit Mathematik ihre Fähigkeiten möglichst vielseitig und ausgewogen entwickeln.

#### Adresse des Autors

Prof. Dr. Volker Ulm, Universität Augsburg, Lehrstuhl für Didaktik der Mathematik, D-86135 Augsburg  
<http://www.math.uni-augsburg.de/dida/>  
[ulm@math.uni-augsburg.de](mailto:ulm@math.uni-augsburg.de)