Ordentlicher Termin 2017
Zweite schriftliche Prüfung

Ministero dell' Istruzione, dell' Università e della Ricerca

H043 – ABSCHLUSSPRÜFUNG AN DEN GYMNASIEN

Fachrichtung: LI02 - REALGYMNASIUM

LI03, – REALGYMNASIUM - SCHWERPUNKT ANGEWANDTE NATURWISSENSCHAFTEN

Arbeit aus: MATHEMATIK

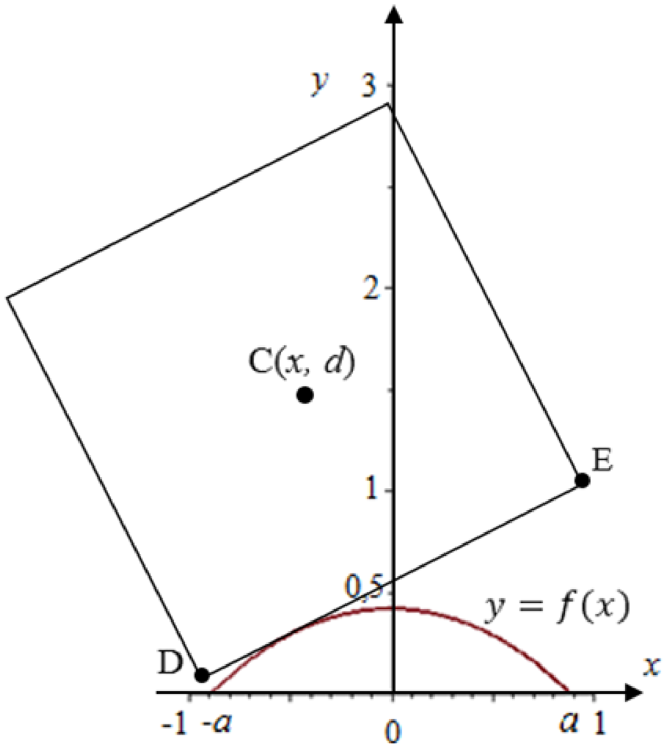
Lösen Sie eine der beiden Problemstellungen und bearbeiten Sie 5 der 10 gestellten Fragen.

PROBLEMSTELLUNG 1

Kann man mit einem Fahrrad mit quadratischen Rädern auf bequeme Art und Weise fahren? Im New Yorker MoMath-Museum of Mathematics kann man dies in einer der mathematischen Unterhaltung gewidmeten Ausstellungshalle (Figur 1) versuchen. Es ist jedoch notwendig, dass das Bodenprofil, auf der die Seite des Rades abrollt, einigen Anforderungen entspricht.

In Figur 2 ist eine Abbildung der Situation im kartesischen Koordinatensystem Oxydargestellt: das Quadrat mit der Seite $DE = 2$ (in angemessener Maßeinheit) und dem Mittelpunkt C stellt das Rad des Fahrrades dar, der Graph der Funktion $f(x)$ stellt das Bodenprofil dar.

Figur 1



Figur 2

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

H043 – ABSCHLUSSPRÜFUNG AN DEN GYMNASIEN

Fachrichtung: LI02 - REALGYMNASIUM

LI03, – REALGYMNASIUM - SCHWERPUNKT ANGEWANDTE NATURWISSENSCHAFTEN

Arbeit aus: MATHEMATIK

1) Zeigen und argumentieren Sie, auf Basis der Informationen aus der Figur 2, dass die Funktion:

$$f(x) = \sqrt{2} - \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad x \in \mathbb{R}$$

das Bodenprofil im Bereich $x \in [-a\,;\ a]$passend darstellt; bestimmen Sie außerdem die Ränder a und $-a$ des Intervalls.

Um das komplette Bodenprofil, auf dem sich das Fahrrad bewegen kann, darzustellen, werden mehrere Kopien des Graphen der Funktion $f(x)$ bezüglich des Intervalls $[-a\,;\ a]$aneinandergereiht, so wie in Figur 3 dargestellt.

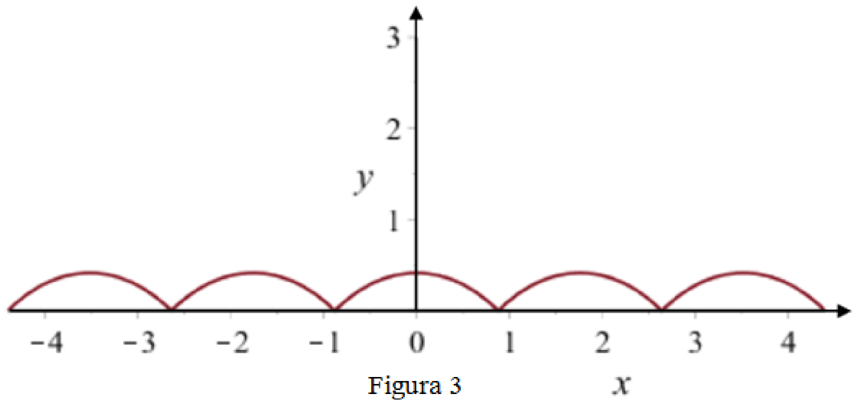


Figura 3

2) Damit sich das Fahrrad auf bequeme Art und Weise entlang des Bodenprofils bewegen kann, ist es notwendig, dass:
   - sich die Teile des Graphen an den nicht differenzierbaren Punkten orthogonal treffen;
   - die Länge der Seite des quadratischen Rades gleich lang ist wie die Länge eines "Hügels", also des Kurvenbogens mit der Gleichung $y = f(x)$ für $x \in [-a;\ a]$.

   Stellen Sie fest, ob diese Bedingungen gegeben sind.[1]

3) Zeigen Sie, in Hinblick auf die Ähnlichkeit der rechtwinkligen Dreiecke ACL und ALM in der Figur 4, und auf die geometrische Bedeutung der Ableitung, dass der Wert der Ordinate d des Mittelpunkts des Rades während der Bewegung konstant bleibt. Deswegen hat der Fahrradfahrer den Eindruck, dass er sich auf einer ebenen Fläche bewegt.

[1]Im Allgemeinen gilt, dass die Länge eines Kurvenbogens mit der Gleichung $y = \varphi(x)$ innerhalb der Grenzen x_1 und x_2 gleich $\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (\varphi'(x))^2}\, dx$ ist).

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

H043 – ABSCHLUSSPRÜFUNG AN DEN GYMNASIEN

Fachrichtung: LI02 - REALGYMNASIUM

LI03, – REALGYMNASIUM - SCHWERPUNKT ANGEWANDTE NATURWISSENSCHAFTEN

Arbeit aus: MATHEMATIK

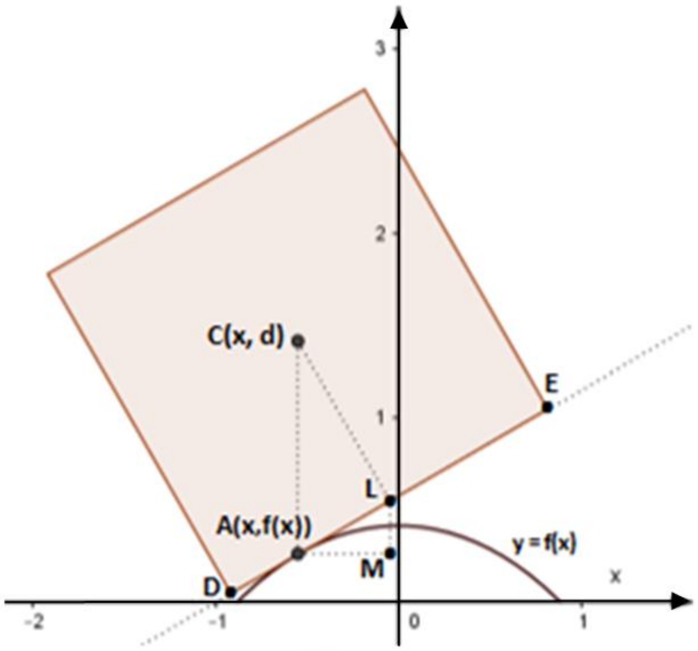


Figura 4

Auch der Graph der Funktion:

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \text{per } x \in \left[-\frac{ln(3)}{2}; \frac{ln(3)}{2}\right]$$

öfters wiederholt, kann ein angepasstes Bodenprofil repräsentieren, welches von einem Fahrrad mit sehr speziellen Reifen befahren werden kann, falls diese die Form eines regelmäßigen Vielecks haben.

4) Ermitteln Sie dieses regelmäßige Vieleck und begründen Sie die Antwort.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

H043 – ABSCHLUSSPRÜFUNG AN DEN GYMNASIEN

Fachrichtung: LI02 - REALGYMNASIUM

LI03, – REALGYMNASIUM - SCHWERPUNKT ANGEWANDTE NATURWISSENSCHAFTEN

Arbeit aus: MATHEMATIK

PROBLEMSTELLUNG 2

Gegeben sei die periodische Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$mit der Periode $T = 4$ deren Graph nachfolgend im Intervall $[0; 4]$dargestellt ist:

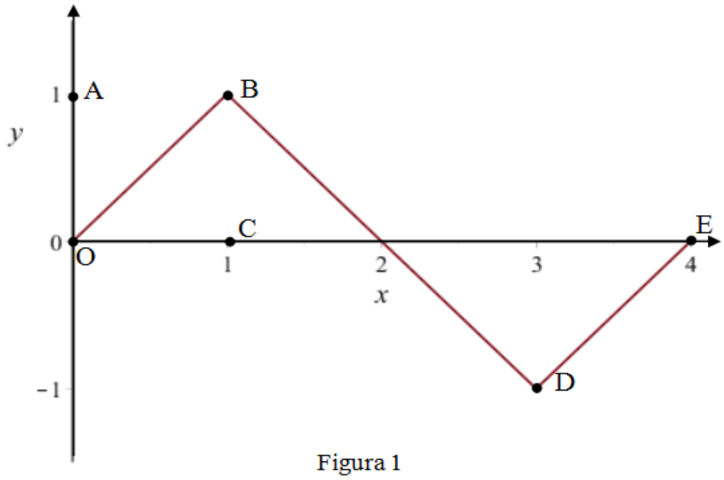


Figura 1

Wie man aus der Figur 1 ersehen kann, sind die Strecken OB, BD, DE des Graphen Abschnitte, deren Randpunkte die Koordinaten: $O(0,0)$, $B(1,1)$, $D(3,-1)$, $E(4,0)$ haben.

1) Bestimmen Sie, in welchen Punkten des Definitionsbereichs die Funktion f stetig ist und in welchen sie ableitbar ist und beweisen Sie die Existenz der Grenzwerte: $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ und $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$; berechnen Sie deren Werte, falls sie existieren. Stellen Sie außerdem die Graphen der folgenden Funktionen für $x \in [0; 4]$dar:

$$g(x) = f'(x)$$

$$h(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

2) Betrachten Sie die Funktion:

$$s(x) = sen(bx)$$

mit b konstant und reell positiv; bestimmen Sie b so, dass $s(x)$ die selbe Periode wie $f(x)$ besitzt.

Zeigen Sie, dass das ebene quadratische Stück $OABC$ aus Figur 1 von den Funktionen $f(x)$ und $s(x)$ in 3 verschiedene Teile unterteilt wird und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig aus dem Innern der Quadrates $OABC$ gewählter Punkt in einem der 3 ermittelten Teile liegt (für jedes dieser 3 Teile ist die Wahrscheinlichkeit zu berechnen).

3) Gegeben sind nun die Funktionen:

$$f(x)^2 \quad \text{und} \quad s(x)^2$$

Erörtern und argumentieren Sie die Veränderungen (Zunahme oder Abnahme) der 3 Wahrscheinlichkeitswerte, berechnet aus dem vorhergehenden Punkt.

4) Ermitteln Sie schlussendlich das Volumen des Körpers, welcher durch Rotation der ebenen Fläche, eingeschlossen vom Graphen der Funktion h für $x \in [0; 3]$ und der x-Achse, um die y-Achse entsteht.

FRAGENKATALOG

1. E sei bestimmt durch:

$$E = \int_0^1 xe^x dx,$$

zeigen Sie, dass gilt:

$$\int_0^1 x^2 e^x dx = e - 2E,$$

und drücken Sie den Ausdruck

$$\int_0^1 x^3 e^x dx$$

durch e und E.aus.

2. Ein zylinderförmiger Kuchen liegt unter einer halbkugelförmigen Plastikform. Zeigen Sie, dass der Kuchen weniger als 3/5 des Volumens der Halbkugel belegt.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

H043 – ABSCHLUSSPRÜFUNG AN DEN GYMNASIEN

Fachrichtung: LI02 - REALGYMNASIUM

LI03, – REALGYMNASIUM - SCHWERPUNKT ANGEWANDTE NATURWISSENSCHAFTEN

Arbeit aus: MATHEMATIK

3. Gegeben sei:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{ax+2b}-6}{x}=1$$

Bestimmen Sie die Werte a und b.

4. Um reelle Zahlen aus dem Intervall $[0,2]$ auszulosen, wird ein Zufallsgenerator erstellt, welcher Zahlen, verteilt im genannten Intervall generiert, mit einer Wahrscheinlichkeitsdichte gemäß der Funktion:

$$f(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{4}x^3$$

Welches ist der Durchschnittswert der generierten Zahlen?
Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass die erste ausgeloste Zahl 4/3 ist?
Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass die zweite ausgeloste Zahl kleiner als 1 ist?

5. Gegeben sind die Punkte $A(-2,3,1)$, $B(3,0,-1)$, $C(2,2,-3)$, bestimmen Sie die Gleichung der Geraden r, verlaufend durch A und B und die Gleichung der Ebene π, senkrecht auf r und verlaufend durch C.

6. Bestimmen Sie die reelle Zahl $a$so, dass der Wert von

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)-x}{x^a}$$

eine reelle Zahl ungleich 0 ist.

7. Bestimmen Sie die Koordinaten der Mittelpunkte der Kugeln mit Radius $\sqrt{6}$ welche die Ebene π mit der Gleichung:

$$x+2y-z+1=0$$

in ihrem Punkt P mit den Koordinaten $(1,0,2)$ berühren.

8. Ein Würfel hat die Form eines regelmäßigen Dodekaeders mit den nummerierten Seiten von 1 bis 12. Der Würfel ist in dem Maße gezinkt, dass die Seite mit der Nummer 3 mit der doppelten Wahrscheinlichkeit P auftritt als jede andere Seite. Bestimmen Sie den Wert P in Prozent und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in 5 Würfen die Seite mit der Nummer 3 wenigstens 2 Mal vorkommt.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

H043 – ABSCHLUSSPRÜFUNG AN DEN GYMNASIEN

Fachrichtung: LI02 - REALGYMNASIUM

LI03, – REALGYMNASIUM - SCHWERPUNKT ANGEWANDTE NATURWISSENSCHAFTEN

Arbeit aus: MATHEMATIK

9. Zeigen Sie, dass die Gleichung:

$$arctg(x) + x^3 + e^x = 0$$

nur eine einzige reelle Lösung hat.

10. Gegeben sei die Funktion:

$$f(x) = |4 - x^2|$$

beweisen Sie, dass diese Funktion nicht allen Forderungen des Theorems von Rolle im Intervall $[-3; 3]$ genügt und dass es zumindest einen Punkt im Intervall $[-3; 3]$ gibt, in welchem die erste Ableitung von $f(x)$ gleich Null ist. Widerspricht dieses Beispiel dem Theorem von Rolle? Begründen Sie die Antwort ausführlich.

Dauer der Arbeit: 6 Stunden.
Es ist die Benutzung von wissenschaftlichen oder graphischen Taschenrechnern erlaubt, falls sie nicht die Funktion einer symbolischen Kalkulation haben (CAS – Computer Algebraic System).
Der Gebrauch eines zweisprachigen Wörterbuchs (Deutsch - Sprache des Herkunftslandes) ist für Schülerinnen und Schüler mit Migrationshintergrund erlaubt.
Das Schulgebäude darf erst drei Stunden nach Bekanntgabe des Themas verlassen werden.