UNIONE MATEMATICA ITALIANA
PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA

MINISTERO DELL'ISTRUZIONE, DELL'UNIVERSITÀ E DELLA RICERCA

T1

I Giochi di Archimede - Gara Triennio

22. November 2018

- *Die Arbeit besteht aus 20 Aufgaben. Für jede Frage stehen fünf Antworten zur Auswahl; sie sind mit den Buchstaben* **(A)**, **(B)**, **(C)**, **(D)** *und* **(E)** *gekennzeichnet. Genau eine dieser Antworten ist richtig, die anderen 4 sind falsch.*
- *Jede richtige Antwort zählt 5 Punkte, jede falsche 0 Punkte, jede Frage mit einer unleserlichen Antwort bzw. jede Frage ohne Antwort 1 Punkt.*
- *Für jede Aufgabe musst du den Buchstaben, der deiner Meinung nach zur richtigen Antwort gehört, in das unten stehende Raster eintragen. Löschungen oder Korrekturen sind NICHT erlaubt. Die Benutzung eines Taschenrechners oder eines Kommunikationsmittels ist verboten.*
- ***Für die gesamte Arbeit stehen dir 110 min zur Verfügung.*** *Gute Arbeit und gute Unterhaltung!*

Vorname: _______________ Nachname: _________________________ Klasse: _________

Geburtsdatum: _______________ E-Mail (fakultativ): _______________________________

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

1) Welcher der folgenden Brüche ist am größten?

(A) $\frac{2018}{2011}$ **(B)** $\frac{2016}{2009}$ **(C)** $\frac{2020}{2013}$ **(D)** $\frac{2019}{2012}$ **(E)** $\frac{2025}{2018}$

2) Sowohl Luca als auch Claudia haben je zwei rote und zwei schwarze Karten in ihren Händen. Claudia zieht zufällig eine Karte von Luca und gibt diese zu den eigenen. Nun zieht Luca eine Karte von Claudia. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide wieder zwei rote und zwei schwarze Karten haben?

(A) 2/3 **(B)** 2/5 **(C)** 3/5 **(D)** 3/4 **(E)** 1/2

3) Piero baut einen Würfel, indem er 1000 kleine gleiche Würfelchen zusammenklebt (10 Würfelchen entlang jeder Kante). Er malt alle Seitenflächen des so gebauten Würfels grün an. Wie viele der ursprünglichen Würfelchen haben mindestens eine grüne Seitenfläche?

(A) 600 **(B)** 384 **(C)** 504 **(D)** 488 **(E)** 592

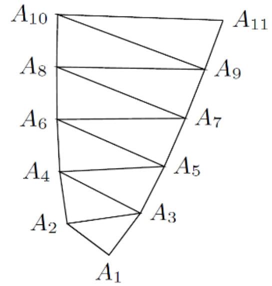
4) Welche der folgenden Zahlen erhält man, in dem man die Summe der Quadrate von zwei ganzen Zahlen bildet, die beide Vielfache von drei sind?

(A) 459 **(B)** 363 **(C)** 633 **(D)** 495 **(E)** 549

5) Ein Handy mit völlig leerer Batterie benötigt zwei Stunden, um sich vollständig aufzuladen, wenn es in der Zwischenzeit nicht verwendet wird. Wenn es hingegen während des Aufladens benutzt wird, werden 40% der zugeführten Energie sofort verwendet und nur der restliche Teil bleibt für das Aufladen. Man weiß, dass zum Aufladen einer völlig leeren Batterie 2,5 Stunden notwendig waren. Wie viele Minuten wurde während des Aufladevorganges das Handy verwendet? (man nimmt an, dass die in einem bestimmten Zeitintervall gespeicherte Energie proportional zu diesem Zeitintervall ist, egal ob man das Handy verwendet oder nicht).

(A) 72 **(B)** 90 **(C)** 60 **(D)** 87 **(E)** 75

6) Teodoro konstruiert eine Folge von rechtwinkligen Dreiecken, wie in der nebenstehenden Figur ersichtlich. Das erste Dreieck $A_1A_2A_3$ ist gleichschenklig, rechtwinklig in A_1 und hat die Kathetenlänge von 1 cm. Das zweite Dreieck $A_2A_3A_4$ ist rechtwinklig in A_2, und A_2A_4 ist immer noch 1 cm. Das dritte Dreieck $A_3A_4A_5$ ist rechtwinklig in A_3 und A_3A_5 ist immer noch 1 cm. Die Konstruktion geht so weiter: jedes Dreieck $A_nA_{n+1}A_{n+2}$ ist rechtwinklig in A_n und die Kathete A_nA_{n+2} ist immer 1 cm. Wie viele cm misst die Strecke $A_{900}A_{901}$?



(A) 60 **(B)** 300 **(C)** 30 **(D)** 45 **(E)** 150

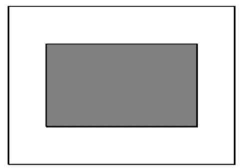
7) Um sich auf die Mathematik-Olympiade vorzubereiten, versucht Costanza eine Aufgabensammlung zu lösen, welche Fragen aus den letzten Jahren enthält. Sie lässt 14 Fragen unbeantwortet und löst 2/3 der restlichen Fragen richtig (die übrigen Antworten sind falsch). Wenn sie die Punkte so zusammenzählt, wie in der Mathematik-Olympiade üblich, erhält sie einen Punkt weniger, als sie erhalten würde, wenn sie alle Fragen beantwortet hätte und genau die Hälfte davon falsch gewesen wäre. Was kann man über die Anzahl der Fragen in der Aufgabensammlung sagen: Sie ist

(A) weniger als 30
(B) zwischen 30 und 33 (beide eingeschlossen)
(C) zwischen 34 und 36 (beide eingeschlossen)
(D) zwischen 37 und 40 (beide eingeschlossen)
(E) mehr als 40

8) Um die Zahl $(10^{2018} + 2018)^2$ auszuschreiben, benötigt man 4037 Ziffern. Wie groß ist die Summe aller dieser Ziffern?

(A) 36 **(B)** 31 **(C)** 42 **(D)** 51 **(E)** 43

9) Die längere Seite eines Bilderrahmens ist 8/5 der kürzeren Seite. Der Bilderrahmen ist auf allen vier Seiten gleich breit. Beim Bild im Inneren des Rahmens (dargestellt durch das graue Rechteck) ist die längere Seite doppelt so groß wie die kürzere. Wie groß ist das Verhältnis der Fläche des Rechtecks, das vom äußeren Rand des Bilderahmens begrenzt wird, zur Fläche des Bildes im Inneren des Rahmens?

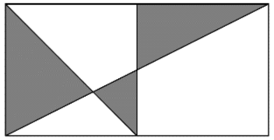


(A) 7/3 **(B)** 20/9 **(C)** 8/5 **(D)** 12/5 **(E)** 64/25

10) Ein Zuckerbäcker hat in seinem Geschäft Bonbons mit 12 verschiedenen Geschmacksrichtungen. Er möchte kleine Geschenkspakete verpacken, die jeweils 3 Bonbons enthalten (nicht unbedingt mit verschiedenen Geschmacksrichtungen). Wie viele verschiedene Geschenkspakete kann er maximal herstellen? (Zwei Pakete sind als gleich zu betrachten, wenn sie gleich viele Bonbons von derselben Geschmacksrichtung haben)

(A) 364 **(B)** 320 **(C)** 324 **(D)** 360 **(E)** 348

11) In der nebenstehenden Figur ist ein Rechteck dargestellt, das in zwei gleiche Quadrate geteilt ist. Die Seite der Quadrate beträgt jeweils 6 cm. Wie groß ist die Gesamtfläche der grau schraffierten Bereiche in cm² ?



(A) 33 **(B)** 30 **(C)** 24 **(D)** 27 **(E)** 21

12) Anna schreibt dreimal hintereinander die gleiche zweiziffrige ganze Zahl und erhält dadurch eine Zahl S mit 6 Ziffern. Die Zahl S ist sicher teilbar durch

(A) 1111 **(B)** 101 **(C)** 11 **(D)** 111 **(E)** 1001

13) Ein Kreis β hat Mittelpunkt B und Radius 40. Die Kreise α und γ haben Mittelpunkt in A bzw. C und denselben Radius r. Sie berühren beide den Kreis β von außen. Die drei Mittelpunkte A, B, C liegen auf einer Geraden. Die Tangenten an β durch A sind auch Tangenten an γ. Was kann man über den Radius r aussagen?

(A) $r < 72$ **(B)** $72 \leq r < 75$ **(C)** $75 \leq r < 78$ **(D)** $78 \leq r < 81$ **(E)** $r \geq 81$

14) Drei Jungen und zwei Mädchen möchten sich an einen Tisch mit sechs Stühlen (durchnummeriert von 1 bis 6) setzen. Um den eigenen Sitzplatz auszuwählen, zieht jeder zufällig einen von sechs durchnummerierten Zetteln (von 1 bis 6). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der leere Stuhl zwischen einem Jungen und einem Mädchen liegt?

(A) 2/5 **(B)** 1/2 **(C)** 3/5 **(D)** 1/3 **(E)** 3/4

15) Giulia schreibt die natürlichen Zahlen in ein Raster mit 7 Spalten, wie in der Abbildung. Weil ihr die Nummer 11 nicht gefällt, fehlen in der Aufzählung alle Vielfachen von 11. Wir bezeichnen mit (m; n) das Feld, das sich in der Zeile mit der Nummer m (von oben gezählt) und in der Spalte mit der Nummer n (von links gezählt) befindet. Zum Beispiel steht im Feld (2; 4) die Zahl 12. In welchem Feld befindet sich die Zahl 2018?

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	23
24	25	…	…	…	…	…
…	…	…	…			
…						

(A) (289; 2) **(B)** (263; 1) **(C)** (278; 5) **(D)** (262; 4) **(E)** (288; 2)

16) Im gleichschenkligen Dreieck ABC ist $\overline{AB} = \overline{AC} = 5\,cm$ und $\overline{BC} = 8\,cm$. Die Seitenhalbierende durch B und die Winkelhalbierende durch C schneiden sich im Punkt D. Wie groß ist die Fläche des Dreiecks BCD in cm²?

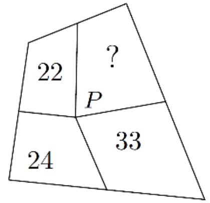
(A) $\frac{32}{7}$ **(B)** $\frac{21}{5}$ **(C)** $\frac{17}{4}$ **(D)** 4 **(E)** $\frac{14}{3}$

17) Man betrachte die Gleichung $ax^2 - bx + a = 0$ mit der Unbekannten x. a und b sind positive reelle Zahlen. Wie viele der folgenden fünf Behauptungen sind richtig?

- wenn b > 2a ist, gibt es zwei verschiedene reelle Lösungen
- wenn es zwei verschiedene reelle Lösungen gibt, dann sind sie positiv
- wenn eine Lösung das Neunfache der anderen ist, dann ist b > 3a
- es kann nicht zwei verschiedene ganzzahlige Lösungen geben, wie immer man a und b wählt
- wenn es zwei reelle Lösungen gibt, dann ist ihr Produkt 1

(A) nur 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4 **(E)** alle 5

18) Von einem Punkt P im Inneren eines konvexen Vierecks zieht man die Verbindung zu den Mittelpunkten der Seiten. Auf diese Weise wird das Viereck in vier Bereiche unterteilt. In der Abbildung sind die Flächen von drei dieser Bereiche angegeben. Wie groß ist die vierte Fläche?



(A) 32 **(B)** 30 **(C)** 27 **(D)** 31 **(E)** 29

19) Giovanna hat 9 Münzen in einer Reihe angeordnet. Einige zeigen Kopf, einige Zahl, in der folgenden Reihenfolge: ZZKKZKKZZ. Sie macht folgendes Spiel: Bei jedem Zug wählt sie zwei aufeinanderfolgende Münzen und dreht sie beide um. Giovanna möchte mit einigen Zügen dieser Art folgende Reihenfolge erhalten: KZKZKZKZK. Was kann man daraus schließen?

(A) es ist nicht möglich.
(B) es gelingt ihr mit mindestens 4 Zügen.
(C) es gelingt ihr mit mindestens 6 Zügen.
(D) es gelingt ihr mit mindestens 8 Zügen.
(E) es gelingt ihr mit einer ungeraden Anzahl an Zügen.

20) Cleopatra spielt mit einer Reihe von n² Zinnsoldaten (n ist eine ganze Zahl größer als 30). Zuerst entfernt Cleopatra von der Reihe alle Soldaten, deren Position einer Quadratzahl entspricht (also den 1ten, den 4ten, den 9ten, usw.). Sobald Cleopatra dies getan hat, bildet sie aus den verbliebenden Soldaten eine neue Reihe und entfernt wieder alle Soldaten, deren Position einer Quadratzahl entspricht. Sie vollendet diesen Vorgang immer wieder, bis sie von diesem Spiel müde ist und aufhört zu spielen. Wie viele Zinnsoldaten könnten übriggeblieben sein?

(A) 126 **(B)** 132 **(C)** 125 **(D)** 140 **(E)** 120