STAATLICHE ABSCHLUSSPRÜFUNG AN DEN REALGYMNASIEN

BEISPIEL einer Prüfungsarbeit aus: MATHEMATIK

Lösen Sie eine der beiden folgenden Problemstellungen und 5 der 10 gestellten Fragen.

Problemstellung 1

Die Kontrollstationen des Po in Pontelagoscuro (FE) zeichnen den Wert der Wasserdurchflussmenge auf, d.h. das Volumen des Wassers, das pro Zeiteinheit einen Querschnitt des Flusses durchfließt. Als Verantwortlicher für die Sicherheit der Flussschifffahrt in diesem Abschnitt des Po, müssen Sie beurteilen, wann Sie die Schifffahrt unter Berücksichtigung der Wetterbedingungen und des Wasserstandes erlauben.

Im Laufe des Jahres liegt die durchschnittliche Durchflussmenge des Po (in Pontelagoscuro) bei zirka 34 Millionen m^3 pro Tag bei Niedrigwasser, bei 130 Millionen m^3 pro Tag mit einer Schwankung von 10% bei normalen Wasserstand und bei 840 Millionen m^3 pro Tag bei Hochwasser (Quelle *deltadelpo.net*).
Im Laufe von einigen Tagen mit schweren Niederschlägen, geht aus den aufgezeichneten Messungen hervor:
- in den ersten beiden Tagen nach Beginn der Messungen ist der Wert der Wasserdurchflussmenge vom Wert bei normalem Wasserstand von 130 Millionen m^3 pro Tag bis zu einem Höchstwert von 950 Millionen m^3 pro Tag angestiegen,
- in den nachfolgenden Tagen hat sich die Durchflussmenge verringert und ist auf den normalen Wert zurückgekehrt, zunächst schneller und dann langsamer.

1. Bezeichnen Sie mit t die Zeit, gemessen in Tagen, und bestimmen Sie ein geeignetes kartesisches Bezugssystem, in dem der Graph des Verlaufs der Durchflussmenge darzustellen ist. Überprüfen Sie, ob eine der folgenden Funktionen als Modell verwendet werden kann, um den Verlauf, unter Berücksichtigung der Messwerte und des maximalen Punktes zu beschreiben und begründen Sie mit geeigneten Argumentationen sowohl Ihre Wahl, als auch den Ausschluss der anderen Funktionen.
$$f(t) = a \cdot \cos(b \cdot t) + c$$
$$g(t) = a \cdot e^{-\frac{t^2}{b}} + c$$
$$h(t) = a \cdot t \cdot e^{1-b\cdot t} + c$$
$$a, b, c \in R$$

2. Nachdem Sie die Funktion ermittelt haben, bestimmen Sie die Parameter so, dass die oben beschriebenen Bedingungen für die Durchflussmenge erfüllt sind und zeichnen Sie den Graphen.

3. Untersuchen Sie die Änderung der Durchflussmenge in der Zeit und schätzen Sie, nach wie vielen Tagen diese Änderung ihr Minimum erreicht. Als Verantwortlicher für die Sicherheit müssen Sie entscheiden, wann die Wiederaufnahme der Schifffahrt unter sicheren Bedingungen genehmigen wird: Beurteilen Sie analytisch oder graphisch, nach wie vielen Tagen die

Durchflussmenge wieder innerhalb der Schwankungsgrenzen des Wertes bei normalem Wasserstand liegt.

4. Wie groß ist das Volumen des Wassers, das in der Zeit zwischen dem Beginn des Phänomens und der Rückkehr auf Normalstand, den Wert des normalen Wasserstandes überschritten hat?

Problemstellung 2

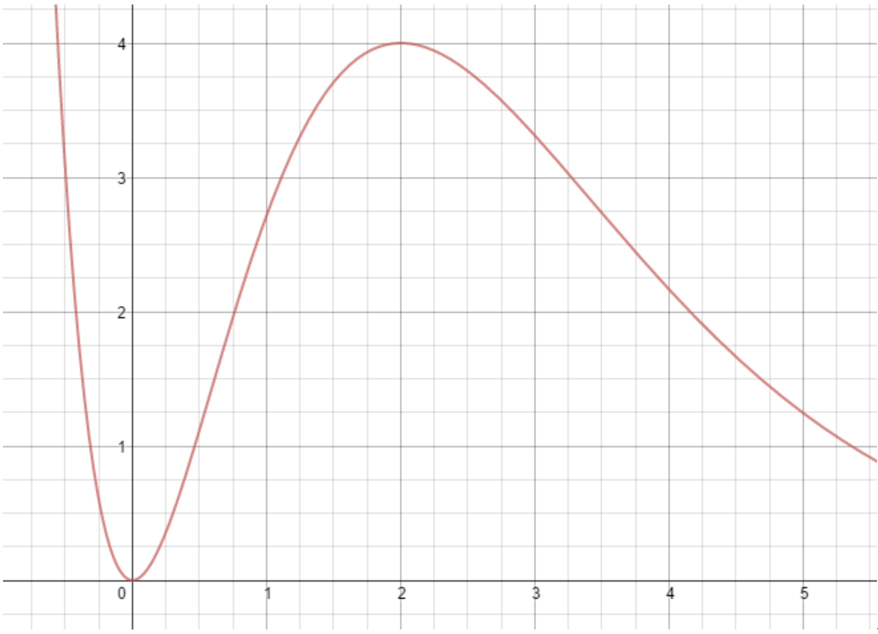

Abbildung 1: Graph G

Der Graph G in Abbildung 1 stellt eine Funktion des Typs $f(x) = x^k \cdot e^{(k-x)}, \quad x \in R, \quad k \in N, k > 1$ dar.

1. Bestimmen Sie den Wert des Parameters k so, dass $f(x)$ durch den Graphen dargestellt wird und begründen Sie Ihre Antwort. Berechnen Sie außerdem die Koordinaten der Wendepunkte, die Gleichungen der eventuellen Asymptoten und die Gleichungen der Tangenten an G in den Wendepunkten.

2. Betrachten Sie ein Dreieck mit den Eckpunkten jeweils im Ursprung, im Punkt der Funktion $f(x)$ mit der Abszisse a und im Punkt P, der dessen Projektion auf die x-Achse ist. Bestimmen Sie den Wert $a \geq 0$, für den die Fläche des Dreiecks maximal ist.

3. Berechnen Sie die Fläche des ebenen abgeschlossenen Bereichs, der von G und der x-Achse im Intervall [0, 2] begrenzt wird und bestimmen Sie den Wert des prozentuellen Fehlers, der bei der Berechnung dieser Fläche eintritt, wenn im Intervall [0, 2] eine Polynomfunktion 3. Grades der Form

$$r(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \qquad x \in R, \quad a,b,c,d \in R \text{ mit}$$
$$r(0) = f(0) = 0, \qquad r(2) = f(2) = 4, \qquad r'(0) = 0, \qquad r'(2) = 0$$

verwendet wird, um $f(x)$ zu approximieren.

4. Bezeichnen Sie mit A und B die Schnittpunkte zwischen der x-Achse und den Tangenten an G in den Wendepunkten, mit C und D die Projektionen der Wendepunkte auf die x-Achse. Beweisen Sie, dass gilt: $\overline{AB} = 2\overline{CD}$ für alle $k \in N$, $k > 1$.

Liste der Fragen

1. Bestimmen Sie das Volumen des Körpers, der entsteht, wenn der von der Kurve mit der Gleichung $y = x^3 - x + 3$ und der Geraden mit der Gleichung $y = 3$ begrenzte ebene Bereich um diese Gerade $y = 3$ rotiert.
2. Weisen Sie nach, dass die Funktion
$$f(x) = \frac{1}{3^{\frac{1}{x}} + 1}$$
eine Unstetigkeitsstelle erster Art („Sprungstelle") hat und dass die Funktion
$$g(x) = \frac{x}{3^{\frac{1}{x}} + 1}$$
hingegen eine Unstetigkeit dritter Art („behebbare Unstetigkeitsstelle") hat.
3. Während der Spitzenzeit einer Grippe-Epidemie ist 15% der Bevölkerung erkrankt zu Hause.
   a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Klasse von 20 Schülern, mehr als zwei wegen der Grippe abwesend sind?
   b) Beschreiben Sie die Berechnungen, mit denen Sie zeigen können, dass die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Schule mit insgesamt 500 Schülern mehr als 50 an Grippe erkrankt sind, größer als 99% ist.
4. Berechnen Sie unter Verwendung des Differentials die Zunahme des Volumens eines geraden Kegels mit einem Radius der Grundfläche von 2 m und einer Höhe von 4 m, wenn der Radius der Grundfläche um 2 cm zunimmt.

5. Gegeben ist die Parabel mit der Gleichung $y = 4 - x^2$. Im ersten Quadranten begrenzt jede Tangente an die Parabel mit den Koordinatenachsen ein Dreieck. Bestimmen Sie den Berührpunkt so, dass die Fläche dieses Dreiecks minimal ist.

6. Bestimmen Sie die partikuläre Lösung der Differentialgleichung $y' - x = xy$, welche die Anfangsbedingung y(0) = 2 erfüllt.

7. Berechnen Sie den Mittelwert der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & 1 \le x \le 3 \\ e^{x-3}+1 & 3 < \mathrm{x} \le 6 \end{cases}$$

im Intervall [1, 6], und bestimmen Sie den Wert von *x*, für den die Funktion den Mittelwert annimmt.

8. Eine Kugel hat einen Radius, der im Laufe der Zeit laut einer gegebenen Funktion *r(t)* zunimmt. Berechnen Sie den Radius der Kugel in dem Augenblick, in dem die Wachstumsgeschwindigkeit der Kugeloberfläche und die Wachstumsgeschwindigkeit des Radius numerisch gleich sind.

9. In einem kartesischen Koordinatensystem *Oxyz* im Raum sind die Gerade *r,* definiert durch die Gleichungen

$$\begin{cases} x = 2t+1 \\ y = t+1 \\ z = kt \end{cases}$$

und die Ebene β, definiert durch die Gleichung $x + 2y - z + 2 = 0$, gegeben.

Ermitteln Sie, für welchen Wert von *k* die Gerade *r* und die Ebene β parallel sind und berechnen Sie den Abstand zwischen ihnen.

10. Bestimmen Sie die Gleichung der Kreislinie *K*, die ihren Mittelpunkt auf der *y*-Achse hat und die den Graphen G_f von $f(x) = x^3 - 3x^2$ im Wendepunkt berührt.

Dauer der Arbeit: 6 Stunden.
Es ist nur die Benützung eines nicht programmierbaren Taschenrechners erlaubt.
Der Gebrauch eines zweisprachigen Wörterbuchs (Deutsch – Sprache des Herkunftslandes) ist für die Schülerinnen und Schüler mit Migrationshintergrund erlaubt.
Das Schulgebäude darf erst drei Stunden nach Bekanntgabe des Themas verlassen werden.