Lösung der Problemstellung 1

1. Zunächst untersuchen wir die Wechselwirkung nach dem Thomson-Modell:
   Da das $\alpha-$Teilchen sehr viel kleiner als das Goldatom ist, sehen wir es als punktförmig an.
   Das Goldatom wird als geladene Vollkugel betrachtet.
   Solange das $\alpha-$Teilchen außerhalb dieses Volumens ist, erfolgt seine Wechselwirkung wie mit einer punktförmigen Ladung in der Mitte des Goldatoms, und zwar nach dem Coulombschen Gesetz.
   Die abstoßende Kraft zwischen den beiden positiven Ladungen ist für $r > R$ gleich

   $$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q \cdot Q}{r^2}$$

   wobei q die Ladung des $\alpha-$Teilchens (zwei Protonen), Q die Ladung des Goldatoms (79 Protonen) und r der Abstand des $\alpha-$Teilchens zum Mittelpunkt des Goldatoms sind. Bei diesen Distanzen ist die Kraft umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstandes.
   Dringt das $\alpha-$Teilchen in die Vollkugel ein, dann ist die abstoßende Kraft gleich $F = q \cdot E$, wobei E die Feldstärke einer homogen geladenen Kugel mit Radius r ist. Nach dem Gesetz von Gauß gilt:

   $$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q'}{\epsilon_0}$$

   wobei Q' die Ladung innerhalb der Kugel mit Radius r ist. Da die Ladung im Thomson-Modell homogen verteilt ist, können wir Q' berechnen: $Q' = Q \cdot \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = Q \cdot \frac{r^3}{R^3}$

   $$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \cdot r$$

   Für $0 < r < R$ ist die wirkende Kraft gleich

   $$F = \frac{q\,Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \cdot r$$

   und somit direkt proportional zum Abstand zum Mittelpunkt des Goldatoms.

   Beim Rutherford-Modell ist es einfacher: Da das $\alpha-$Teilchen nicht in den Kern eindringt, gilt für alle Abstände $r > 10^{-15}\,m$ zum Kern mit den Bezeichnungen wie oben:

   $$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q \cdot Q}{r^2}$$

   Somit ist hier die abstoßende Kraft immer umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstandes der beiden Ladungsschwerpunkte.

2. (a) Die Kraftvektoren in den Punkten A, B und C zeigen radial vom Mittelpunkt des Goldatoms weg.
   A befindet sich in der Vollkugel, es gilt daher

   $$F_A = \frac{q\,Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \cdot \frac{R}{2} = \frac{79 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}C \cdot 2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}C}{4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}As/(Vm) \cdot (10^{-10}\,m)^3} \cdot \frac{10^{-10}\,m}{2} = 1,8 \cdot 10^{-6}N$$

B befindet sich auf der Oberfläche der Vollkugel, es gilt daher

$$F_B = \frac{q\,Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} = 3,6 \cdot 10^{-6} N$$

C befindet sich außerhalb der Vollkugel, es gilt daher

$$F_C = \frac{q\,Q}{4\pi\epsilon_0 (2R)^2} = 0,91 \cdot 10^{-6} N$$

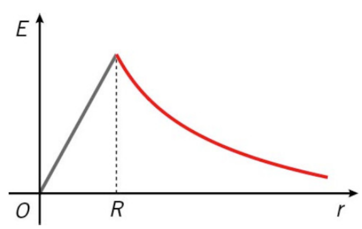
(b) Die Kraftvektoren in den Punkten A', B' und C' zeigen radial vom Mittelpunkt des Goldatoms weg.

$$F_{A'} = \frac{q\,Q}{4\pi\epsilon_0 \left(\frac{R}{2}\right)^2} = 15 \cdot 10^{-6} N$$

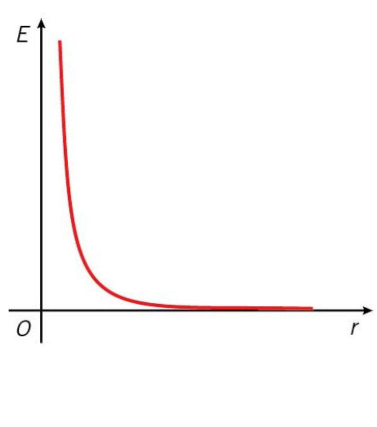
$$F_{B'} = \frac{q\,Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} = 3,6 \cdot 10^{-6} N$$

$$F_{C'} = \frac{q\,Q}{4\pi\epsilon_0 (2R)^2} = 0,91 \cdot 10^{-6} N$$

3. Beim Thomson-Modell ist die Kraft bei $R = 10^{-10}\,m$ am größten. Näher zum Kern sinkt sie wieder.
Es gilt $E = \frac{F}{q}$. Daher ist zur Berechnung von E die Kraft durch die Ladung des $\alpha-$Teilchens zu dividieren.



Bis zu einem Abstand von $r = 10^{-10}$ m ist die Feldstärke gleich wie beim Thomson-Modell.
Beim Rutherford-Modell wächst die Kraft mit abnehmender Entfernung zum Mittelpunkt. Sie wächst bis zum Erreichen des Kerns ($r = 10^{-15}$ m).



Im Rutherford-Modell werden höhere Feldstärken erreicht.

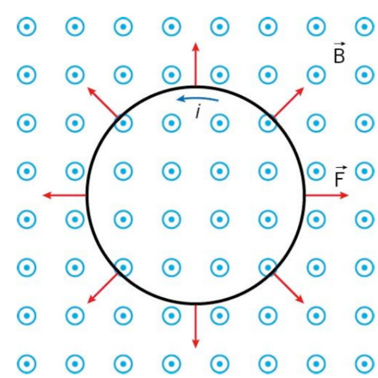
4. (a) Die Bewegung erfolgt mit einer zunehmenden Kraft. Die Gesamtenergie des $\alpha-$Teilchens bleibt erhalten:
$E_{pot} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q \cdot Q}{r}$
Im geringsten Abstand r_P ist die kinetische Energie gleich 0. Daher gilt:
$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q \cdot Q}{R} + E_{kin}(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q \cdot Q}{r_P} \Rightarrow$
$r_P = \frac{\frac{q \cdot Q}{4\pi\epsilon_0}}{\frac{q \cdot Q}{4\pi\epsilon_0 R} + E_{kin}(R)} = 3,3 \cdot 10^{-14}\,\mathrm{m}$
Die gesuchte Distanz ist $R - r_P = 9,9967 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m}$.

(b) Das $\alpha-$Teilchen bewegt sich geradlinig auf den Kern zu, wird gebremst, hält an und wird vom Kern zurückgeschleudert. Die Beschleunigung nimmt mit zunehmender Distanz wieder ab.

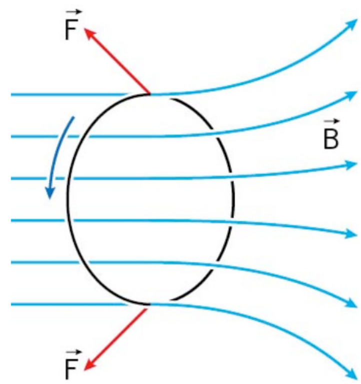
(c) Im Thomsonschen Atommodell ist die Kraft innerhalb der Vollkugel proportional zu r. Die Arbeit ergibt sich durch Integration: $W = \int F \mathrm{d}r$; da F proportional zu r ist, erhalten wir bei der Integration einen Faktor mit $\frac{r^2}{2}$.Die zu verrichtende Arbeit ist: $W = 0,5 \cdot \frac{q\,Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \cdot r^2$
Die Arbeit von der Oberfläche bis zum Mittelpunkt der Kugel beträgt $W = 1,83 \cdot 10^{-16} J$
Die kinetische Energie nimmt also nur geringfügig ab, das $\alpha-$Teilchen kann bis zur Mitte vordringen und wird dort in Flugrichtung weiterbeschleunigt, wobei die Beschleunigung jetzt abnimmt.
Somit fliegt das $\alpha-$Teilchen bei diesen kinetischen Energien im Thomsonschen Atommodell durch das Goldatom durch, wird also nicht abgelenkt. Dies stimmt nicht mit den Messergebnissen überein. Das Thomsonsche Atommodell kann nicht die Rückstreuung erklären, das Rutherfordsche Atommodell schon.

Lösung der Problemstellung 2

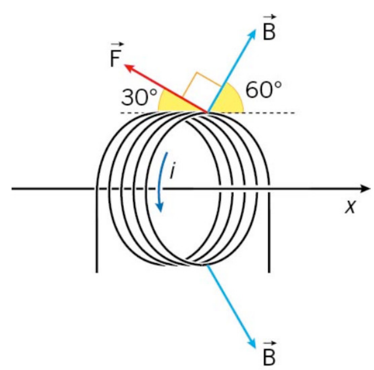
1. Die Abbildung zeigt einen Schnitt durch die Ebene der Spule. Der Strom fließt im Gegenuhrzeigersinn, das Magnetfeld zeigt aus der Ebene heraus. In jedem kleinen Teilabschnitt Δl ist der Betrag der Kraft gleich und senkrecht zum Strom gerichtet. Die Kraft zeigt radial nach außen. Die Summe aller Kräfte ist null.



Im zweiten Fall ist das Magnetfeld nicht senkrecht zur Ebene der Spule, sondern hat zusätzlich eine Komponente, die in der Ebene liegt. Dies führt zu einer Kraftkomponente, die senkrecht zur Ebene ist. Die verschiedenen Kräfte auf die Spule heben sich nun nicht mehr auf.



2. Da der Strom und das Magnetfeld überall senkrecht zueinander sind, ist die Kraft pro Längeneinheit gleich
$$f = \frac{F}{l} = n \cdot B \cdot i = 6,4\,N/m$$
Der radiale Anteil der Kraft hebt sich wie im vorigen Fall auf. Nur der Teil der Kraft, der parallel zur Achse der Spule ist, hebt sich nicht auf:
$$f_{||} = f\cos(30°) = 5,5\,N/m$$
Die Länge ist gleich $l = d\pi = 5,65 \cdot 10^{-2}\,m$, daher ist die resultierende Kraft gleich
$$F = f_{||} \cdot l = 0,31\,N$$
antiparallel zur Achse x.



3. Das Magnetfeld nicht homogen (siehe vorvorigen Abbildung). Daher ändert sich der magnetische Fluss Φ, wenn sich die Spule entlang der $x-$Achse bewegt.
Wenn sich die Spule in die positive $x-$Richtung bewegt, dann nimmt der Fluss ab; er nimmt zu, wenn sie sich in die negative $x-$Richtung bewegt. Nach dem Induktionsgesetz von Faraday wird durch die Bewegung der Spule eine Spannung induziert:
$$U_{ind} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

4. Die Fläche der Spule ist $A = r^2\pi = 2,54 \cdot 10^{-4}\,m^2$.
   Der induzierte Strom ist

$$i = \frac{U_{ind}}{R} = -\frac{\frac{nA(B_2 - B_1)}{\Delta t}}{R} = -\frac{nA(B_2 - B_1)}{R\Delta t}$$

   Um die einzelnen Magnetfelder zu bestimmen, müssen wir in der ersten Graphik die Position der Spule bestimmen und in der zweiten Graphik die zugehörige magnetische Flussdichte ablesen.

   (a)
$$x_1 = 0,15\,mm; B_1 = 0,50\,T$$
$$x_2 = 0,30\,mm; B_2 = 0,38\,T$$
$$i = 1,5 \cdot 10^{-3}\,A$$

   (b)
$$x_1 = 0,59\,mm; B_1 = 0,24\,T$$
$$x_2 = 0,59\,mm; B_2 = 0,24\,T$$
$$i = 0\,A$$

   (c)
$$x_1 = 0,30\,mm; B_1 = 0,38\,T$$
$$x_2 = 0,15\,mm; B_2 = 0,50\,T$$
$$i = -1,5 \cdot 10^{-3}\,A$$

Fragen

Lösung der Frage 1

Für die Intensität der Welle gilt:

$$I = c \cdot \epsilon_0 \cdot E_{eff}^2$$

Daher gilt:
$\mathrm{I}_{954,6} = 3,00 \cdot 10^8 \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \cdot (8,00 \cdot 10^{-2})^2 \mathrm{W/m^2} = 1,70 \cdot 10^{-5} \mathrm{W/m^2}$
$\mathrm{I}_{958,2} = 3,00 \cdot 10^8 \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \cdot (1,21)^2 \mathrm{W/m^2} = 3,89 \cdot 10^{-3} \mathrm{W/m^2}$

Falls die Antenne in alle Richtungen gleich abstrahlt, so wird die Energie auf eine Kugeloberfläche mit Radius $40\,m$ verteilt:

$P_{954,6} = I_{954,6} \cdot 4\pi r^2 = 1,70 \cdot 10^{-5} \cdot 4\pi \cdot 40^2 \mathrm{W} = 0,342 \mathrm{W}$

$P_{958,2} = I_{958,2} \cdot 4\pi r^2 = 3,89 \cdot 10^{-3} \cdot 4\pi \cdot 40^2 \mathrm{W} = 78,2 \mathrm{W}$
Die gesamte Strahlungsleistung ergibt sich aus der Summe der Leistungen bei den verschiedenen Frequenzen.

$P_{\mathrm{tot}} = P_{954,6} + P_{958,2} = 78,6 \mathrm{W}$

Die Intensität ändert sich proportional zum Kehrwert des Abstandsquadrates (da die Leistung auf die entsprechende Oberfläche verteilt wird)

$I(60\,m) = I(40\,m) \cdot \frac{40^2}{60^2} = I(40) \cdot \frac{4}{9}$

$I_{954,6}(60\,m) = 1,70 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{4}{9}\mathrm{W/m^2} = 7,56 \cdot 10^{-6}\mathrm{W/m^2}$

$I_{958,2}(60\,m) = 3,89 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{4}{9}\mathrm{W/m^2} = 1,73 \cdot 10^{-3}\mathrm{W/m^2}$

Aus der Gleichung (Achtung: hier der Scheitelwert, deshalb durch 2) $I = \frac{c\,B_S^2}{\mu_0}$ erhalten wir

$B_{S;954,6}(60\,m) = \sqrt{\frac{2I_{954,6;60\,m} \cdot \mu_0}{c}} = \sqrt{\frac{27,56 \cdot 10^{-6} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}{3,00 \cdot 10^8}}\mathrm{T} = 2,52 \cdot 10^{-10}\mathrm{T}$

$B_{S;958,2}(60\,m) = \sqrt{\frac{2I_{958,2;60\,m}\mu_0}{c}} = \sqrt{\frac{21,73 \cdot 10^{-3} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}{3,00 \cdot 10^8}}\mathrm{T} = 3,81 \cdot 10^{-9}\mathrm{T}$

Lösung der Frage 2

Ein einzelner Generator liefert ein Fünfzehntel der Gesamtleistung, also 80 MW. In jeder Sekunde verrichtet das fallende Wasser eine Arbeit von 80 MJ:

$$mgh = W \Rightarrow m = \frac{W}{gh} = \frac{80 \cdot 10^6\,J}{9,81\,\frac{N}{kg} \cdot 180\,m} = 4,53 \cdot 10^4\,kg$$

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow V = \frac{m}{\rho} = \frac{4,53 \cdot 10^4\,kg}{1000\frac{kg}{m^3}} = 45,3\,m^3$$

Es wird eine Wechselspannung mit einer Frequenz von 60, 0 Hz induziert.

$$U_S = N \cdot A \cdot B \cdot \omega = 150 \cdot \pi \cdot (1,00\,m)^2 \cdot 0,100\,T \cdot 2\pi \cdot 60,0\,Hz = 1,78 \cdot 10^4\,V$$

Daher ist der Effektivwert der Spannung gleich

$$U_{eff} = \frac{U_S}{\sqrt{2}} = 1,26 \cdot 10^4\,V$$

Das Verhältnis der Windungszahlen ist

$$\frac{N_s}{N_p} = \frac{1,00 \cdot 10^5}{1,26 \cdot 10^4} = 7,94 \approx 8$$

Wenn primärseitig eine Windungszahl von z.B. 100 vorliegt, dann sind auf der Sekundärseite 800 Windungen.

Lösung der Frage 3

Die Induktivität in der Ruhelage beträgt

$$L_0 = \frac{\mu_0 \cdot N^2 \cdot A}{l_0} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} Vs/(Am) \cdot 10^4 \cdot \pi \cdot (0,00500\,m)^2}{0,1200\,m} = 8,22 \cdot 10^{-6}\,H$$

Die Induktivität bei der angegebenen Streckung ist

$$L_+ = \frac{\mu_0 \cdot N^2 \cdot A}{l_0 + \Delta x_{max}} = 8,19 \cdot 10^{-6}\,H$$

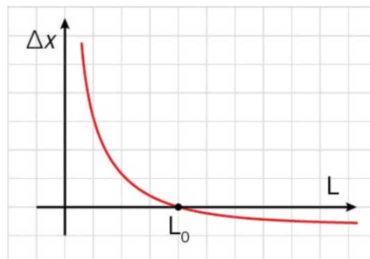
Die Induktivität bei der angegebenen Stauchung ist

$$L_- = \frac{\mu_0 \cdot N^2 \cdot A}{l_0 - \Delta x_{max}} = 8,26 \cdot 10^{-6}\, H$$

Wir stellen Δx frei:

$$\Delta x = \frac{\mu_0 \cdot N^2 \cdot \pi r^2}{L} - l_0$$

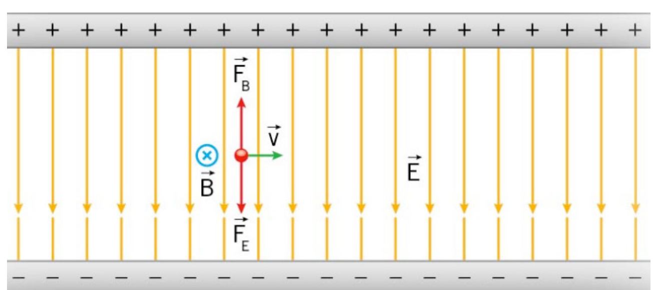
Die Gleichung stellt eine Hyperbel dar, physikalisch relevant ist der rechte Hyperbelast.



Bemerkungen:
Für einen kleinen Bereich von $L = L_0$ kann die Funktion linearisiert werden.
Die Induktivität könnte mit einer Serienschaltung eines bekannten Widerstandes mit der Spule bestimmt werden. Dazu wird noch eine Wechselspannungsquelle mit bekannter Frequenz benötigt.

Lösung der Frage 4

Das positive Ion erfährt eine Kraft, die die gleiche Richtung wie das elektrische Feld hat:$\vec{F} = q \cdot \vec{E}$. Das elektrische Feld zeigt von der positiven zur negativen Platte (siehe Abbildung).



Um diese Kraft auszugleichen muss das Magnetfeld senkrecht zum elektrischen Feld stehen. Die Beträge der Kräfte müssen gleich sein:

$$qE = qvB \Rightarrow B = \frac{E}{v} = \frac{\frac{U}{d}}{v} = \frac{\frac{800\, V}{5,00 \cdot 10^{-3}\, m}}{2,5 \cdot 10^{6}\, m/s} = 6,40 \cdot 10^{-2}\, T$$

Wird in der Mitte des Kondensators das Magnetfeld abgeschaltet, dann wirkt nur mehr das elektrische Feld:

$$F = qE = e \cdot \frac{U}{d} = 1,602 \cdot 10^{-19}\, C \cdot \frac{800\, V}{5,00 \cdot 10^{-3}\, m} = 2,56 \cdot 10^{-14}\, N$$

Die Beschleunigung ist

$$a = \frac{F}{m} = \frac{2,56 \cdot 10^{-14}\, N}{6,64 \cdot 10^{-27}\, kg} = 3,86 \cdot 10^{12} m/s^2$$

Die verbleibende Zeit im Kondensator ist

$$t = \frac{\frac{l}{2}}{v_x} = \frac{0,0200\,m}{2,5 \cdot 10^6\,m/s} = 8,00 \cdot 10^{-9}\,s$$

Die Verschiebung in Richtung Kondensatorplatten ergibt sich durch die konstante Beschleunigung durch

$$\Delta y = \frac{1}{2}at^2 = 0,5 \cdot 3,86 \cdot 10^{12} m/s^2 \cdot (8,00 \cdot 10^{-9}\,s)^2 = 1,24 \cdot 10^{-4}\,m$$

Lösung der Frage 5

$$U_{ind} = Blv = 3,0 \cdot 10^{-5}\,T \cdot 2 \cdot 10^4\,m \cdot 7,5 \cdot 10^3\,m/s = 4,5 \cdot 10^3\,V$$

Mit der Drei-Finger-Regel erhalten wir die Kraft auf eine negative Ladung. Sie ist im Draht vom Shuttle weg gerichtet. Daher bewegen sich die Elektronen im Draht vom Shuttle weg. Die technische Stromrichtung ist entgegengesetzt, also im Draht zum Shuttle hin. In der Atmosphäre ist es genau umgekehrt, da es sich um einen geschlossenen Stromkreis handelt.
Der Widerstand ergibt sich aus dem Ohmschen Gesetz:

$$R = \frac{U}{I} = \frac{4,5 \cdot 10^3\,V}{0,5\,A} = 9,0 \cdot 10^3\,\Omega$$

Der Draht hat einen Widerstand von $100\,\Omega$, also ist der Widerstand der ionisierten Luft gleich $8,9 \cdot 10^3\,\Omega$ und damit sehr viel größer.
Das zweite dieser Space-Tether-Experimente STS-75 wird in der nachfolgenden Quelle beschrieben:
`https://de.wikipedia.org/wiki/STS-75`

Lösung der Frage 6

Der Verschiebungsstrom ist

$$I_V = \epsilon_0 \cdot \frac{\mathrm{d}\Phi_{el}}{\mathrm{d}\,t} = \epsilon_0 \cdot \frac{\mathrm{d}\,(E \cdot A)}{\mathrm{d}\,t} = \epsilon_0 \cdot \frac{\mathrm{d}\,(U/d \cdot A)}{\mathrm{d}\,t} = \epsilon_0 \cdot \frac{A}{d} \cdot \frac{\mathrm{d}\,U}{\mathrm{d}\,t}$$

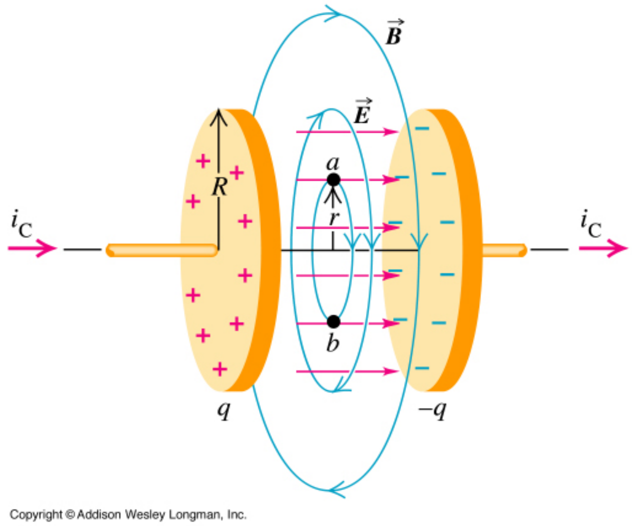
Spannung $U = U_S \cos(\omega t) = 120V \sin(6,28 \cdot 10^4\,Hz \cdot t)$
Die Ableitung der Spannung ist $\frac{\mathrm{d}\,U}{\mathrm{d}\,t} = -U_S\omega \cdot sin(\omega t)$
Für die magnetische Flussdichte B gilt:

$$B = \mu_0 \cdot \frac{I_V}{2\pi r_1} = \frac{\mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot r_1}{2d} \cdot \frac{\mathrm{d}\,U}{\mathrm{d}\,t} = -2,8 \cdot 10^{-8} \sin(6,28 \cdot 10^4\,Hz \cdot t)\,\frac{V}{m} \cdot r_1$$

Zur Zeit $t_1 = 25 \cdot 10^{-6}s$ ist der Sinus maximal.

$$B = -1,12 \cdot 10^{-9}\,T$$

Was hat das negative Vorzeichen zu bedeuten?



In den Zuleitungen fließt ein Strom, der gleich groß ist wie der Verschiebungsstrom und lädt bzw. entlädt die Platten. Wir erden die rechte Platte, das Potential der linken Platte ist gleich der dargestellten Spannung. Zur Zeit t=0 ist die linke Platte positiv geladen. Nun sinkt die Spannung und damit auch die Ladung. Negative Ladungen fließen auf die linke Platte, der Strom fließt somit von rechts nach links (plus nach minus). Nach der Rechten-Hand-Regel hat das Magnetfeld einen Drehsinn im Gegenuhrzeigersinn, wenn wir senkrecht auf die linke Platte schauen.
Die Magnetfeldlinien sind konzentrische Kreise senkrecht zum Strom.
Zur Zeit $t = 5 \cdot 10^{-5} s$ ist $B = 0$
Bei einem Radius $r_2 = 12,0\,\text{cm}$ fließt nur der Strom innerhalb $r = 10\,\text{cm}$. Daher ist in die Formel dieser Radius bei der Fläche einzusetzen!

$$B = \mu_0 \cdot \frac{I_V}{2\pi r_2} = \frac{\mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot r^2}{2dr_2} \cdot \frac{\mathrm{d}\,U}{\mathrm{d}\,t} = -2,8 \cdot 10^{-8} \sin(6,28 \cdot 10^4\, Hz \cdot t)\, \frac{V}{m} \cdot \frac{r^2}{r_2} = 2,33 \cdot 10^{-9}\, T$$

Wiederum ist die magnetische Flussdichte B zur Zeit $t = 5 \cdot 10^{-5} s$ gleich 0