

Quesiti

QUESITO n. 1

Sulla massa m agiscono la forza peso e la tensione T del filo ed essendo in equilibrio $T = mg$. Sulla massa M agiscono la forza peso, la forza d'attrito F_a , la reazione vincolare normale e la tensione del filo e l'oggetto rimane fermo. Considerando le componenti parallele al piano delle forze che agiscono su M , positive verso l'alto, si ha: $T - Mg \sin \alpha + F_a = 0$. Ne segue che

$$F_a = Mg \sin \alpha - \frac{1}{2} Mg$$

e dunque, poiché $\alpha = 30^\circ$ e quindi $\sin \alpha = \frac{1}{2}$, la forza d'attrito è nulla.

QUESITO n. 2

Il periodo di oscillazione con la molla completa è dato da $T = 2\pi\sqrt{m/k}$ essendo m la massa del corpo e k la costante elastica della molla.

Se la molla è pensata come la serie di 3 molle uguali, la costante k' di ciascuna si determina pensando che, a parità di forza applicata, l'allungamento di una di queste molle sarebbe $1/3$ dell'allungamento totale; dunque

$$\frac{F}{k'} = \Delta \ell' = \frac{1}{3} \Delta \ell = \frac{1}{3} \frac{F}{k} \quad \Rightarrow \quad k' = 3k$$

Di conseguenza
$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k'}} = \frac{1}{\sqrt{3}} T = 1.732 \text{ s}$$

RIS \Rightarrow $1.730 \leq T' \leq 1.734 \quad [\text{s}]$

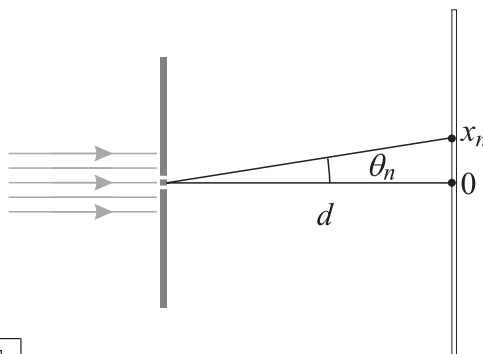
QUESITO n. 3

L'interferenza è costruttiva per tutte le direzioni ad angoli θ_n rispetto alla direzione del fascio incidente tali che $a \sin \theta_n = n\lambda$ dove θ_n è l'angolo mostrato in figura, a è la distanza fra le fenditure, λ è la lunghezza d'onda della luce ed n è un numero intero.

Per piccoli angoli, $\sin \theta_n$ si può approssimare con $\tan \theta_n = x_n/d$, essendo x_n la posizione della frangia n -sima sullo schermo (misurata a partire dal centro dell'immagine) e d la distanza fra il piano delle fenditure e lo schermo.

In queste condizioni si trova che la distanza tra due frange successive è $s = x_{n+1} - x_n = \lambda d/a$ (le frange sono equidistanti). Ne consegue che

$$a = \frac{\lambda d}{s} = 0.393 \text{ mm.} \quad \text{RIS } \Rightarrow \quad \boxed{0.390 \leq a \leq 0.395 \quad [\text{mm}]}$$



QUESITO n. 4

Il campo elettrico nel vertice C è dato dalla somma vettoriale del campo \vec{E}_A generato dalla carica in A e del campo \vec{E}_B generato da quella situata in B.

I moduli di questi due campi sono rispettivamente

$$E_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{2L^2} \quad E_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{L^2}$$

La somma vettoriale si può effettuare, ad esempio, scomponendo \vec{E}_A in una componente orizzontale, E_{Ax} , e in una verticale, E_{Ay} :

$$E_{Ax} = E_{Ay} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{2L^2} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sqrt{2}q}{4L^2}$$

Le componenti del campo risultante sono allora

$$E_x = E_{Ax} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sqrt{2}q}{4L^2} \quad E_y = E_{Ay} + E_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{L^2} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

Il campo elettrico risultante ha quindi modulo

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{L^2} \frac{\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}}{2}$$

Alternativamente, si può osservare che l'angolo tra \vec{E}_A e \vec{E}_B è 45° . Pertanto, applicando il teorema di Carnot si dimostra facilmente

$$E = \sqrt{E_A^2 + E_B^2 + 2E_A E_B \cos 45^\circ} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{L^2} \frac{\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}}{2}$$

NOTA per i correttori \Rightarrow Sono accettabili anche soluzioni numeriche:

$$E = 1.399 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{L^2} \quad \text{oppure} \quad E = 1.257 \times 10^{10} \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2} \frac{q}{L^2}$$

Se la soluzione viene presentata nel secondo modo, dev'essere espressa la corretta unità di misura. I fattori numerici vengono qui forniti con 4 cifre significative, ma possono essere espressi anche con 2 o 3 (es. 1.4 o 1.40)

QUESITO n. 5

Quando il corpo è immerso per un terzo del proprio volume, il modulo della spinta di Archimede – pari alla differenza tra il peso e la forza applicata – è di 33 N.

Poiché la spinta è direttamente proporzionale al volume immerso, quando il corpo è completamente immerso arriva a 99 N, maggiore del peso, ed occorre quindi una forza di 9 N verso il basso per mantenere l'oggetto in equilibrio.

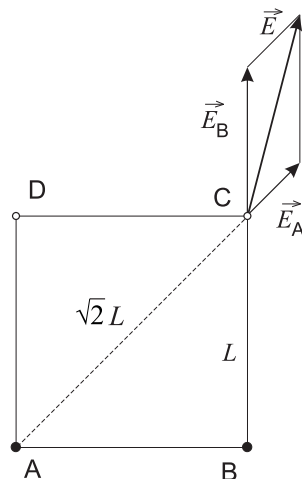
In maniera più formale: le forze che agiscono sul corpo sono il peso, \vec{P} , rivolto verso il basso, la spinta idrostatica, \vec{S} , rivolta verso l'alto, e la forza applicata dall'esterno, \vec{F} . In condizioni di equilibrio, la somma vettoriale di queste tre forze è nulla: $\vec{P} + \vec{S} + \vec{F} = 0$.

Scegliendo un sistema di riferimento orientato verso l'alto, e considerando le componenti dei vettori, nel primo caso si ha

$$S_1 = -P - F_1 \quad \text{con} \quad P = -90 \text{ N} \quad \text{e} \quad F_1 = 57 \text{ N}.$$

Con l'oggetto completamente immerso si ha invece $S_2 = 3S_1$. Ne segue:

$$F_2 = -P - S_2 = -P - 3S_1 = 2P + 3F_1 = -9 \text{ N}$$



QUESITO n. 6

Per l'acqua lo scambio di energia termica (positivo quando il calore è assorbito) si scrive in termini della massa, del calore specifico e della variazione di temperatura come $Q_a = m_a c_a \Delta T_a = m_a c_a (T_{eq} - T_a)$ e analogamente Q_r per il rame, mentre per il calorimetro, di cui è data la capacità termica, $Q_c = C (T_{eq} - T_c)$; infine per il ghiaccio occorre tener conto anche del calore di fusione per cui

$$Q_g = m_g c_g (T_0 - T_g) + \lambda m_g + m_g c_a (T_{eq} - T_0) \quad \text{dove } T_0 = 0^\circ\text{C} \text{ è la temperatura di fusione del ghiaccio.}$$

Il bilancio energetico impone che $\sum Q_i = 0$ ovvero $m_a c_a (T_{eq} - T_a) + Q_r + Q_c + Q_g = 0$

$$\text{da cui si ricava} \quad m_a = \frac{Q_r + Q_c + Q_g}{c_a (T_a - T_{eq})} = 101 \text{ g.}$$

$$\text{RIS} \Rightarrow \quad 99 \leq m_a \leq 103 \quad [\text{g}]$$

QUESITO n. 7

L'automobile si muove di moto uniformemente accelerato. Valgono le relazioni

$$s = v_i t + \frac{1}{2} a t^2 \quad \text{e} \quad v_f = v_i + a t$$

dove s è lo spazio percorso durante la frenata e gli altri simboli hanno significato ovvio. Ricavando a dalla seconda relazione e sostituendola nella prima si trova

$$s = v_i t + \frac{1}{2} (v_f - v_i) t = \frac{1}{2} (v_i + v_f) t = 97.2 \text{ m}$$

$$\text{RIS} \Rightarrow \quad 96.8 \leq s \leq 97.6 \quad [\text{m}]$$

Alternativamente, ricordando che per un moto uniformemente accelerato la velocità media in un certo intervallo di tempo è la media aritmetica tra la velocità iniziale e quella finale, si può scrivere direttamente la formula risolutiva.

QUESITO n. 8

La d.d.p. ai capi del condensatore è $V(t) = Q(t)/C$. La corrente che circola nel resistore vale $i(t) = V(t)/R$ ed è massima all'inizio del processo di scarica quando il condensatore ha la massima carica Q_0 . Si trova quindi

$$i_{\max} = \frac{Q_0}{RC} = 0.6 \text{ mA}$$

QUESITO n. 9

Sia Q il calore fornito in ingresso alla prima macchina. Il lavoro fatto da essa è $W_1 = \eta_1 Q$ e il calore ceduto alla seconda $Q - W_1 = (1 - \eta_1) Q$.

La seconda macchina produce allora un lavoro $W_2 = \eta_2 (1 - \eta_1) Q$ per cui il lavoro totale fatto dalle due macchine è

$$W = W_1 + W_2 = [\eta_1 + \eta_2 (1 - \eta_1)] Q.$$

$$\text{Il rendimento del sistema indicato vale quindi} \quad \eta = \frac{W}{Q} = \eta_1 + \eta_2 - \eta_1 \eta_2.$$

QUESITO n. 10

L'energia di un fotone è $E = h\nu = hc/\lambda$ essendo h la costante di Planck, c la velocità della luce nel vuoto, ν e λ rispettivamente la frequenza e la lunghezza d'onda della luce emessa dal laser. Indicando con P la potenza del laser (energia per unità di tempo), con N il numero di fotoni emessi al secondo e con Δt il tempo considerato, si ha

$$P = NE \quad \text{da cui} \quad N = \frac{P}{E} \quad \Rightarrow \quad n = N \Delta t = \frac{P \Delta t}{E} = \frac{P \Delta t \lambda}{hc} = 6.37 \times 10^{15}$$

$$\text{RIS} \Rightarrow \quad 6.33 \times 10^{15} \leq n \leq 6.41 \times 10^{15}$$

Problemi

PROBLEMA n. 1 – Una lente allo specchio

Quesito n. 1.

Applicando l'equazione dei punti coniugati $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} = \frac{1}{f} \Rightarrow q_1 = \frac{f p_1}{p_1 - f} = 51.0 \text{ cm}$

Poiché nel sistema di riferimento scelto $x_L = 32.9 \text{ cm}$, la posizione di questa immagine è $x_0 = x_L + q_1 = 83.9 \text{ cm}$.

$$\text{RIS} \Rightarrow 83.3 \leq x_0 \leq 84.5 \quad [\text{cm}]$$

Poiché $q_1 > 0$ l'immagine è reale (come si poteva prevedere osservando che $p_1 > f$), e di conseguenza capovolta.

L'ingrandimento è

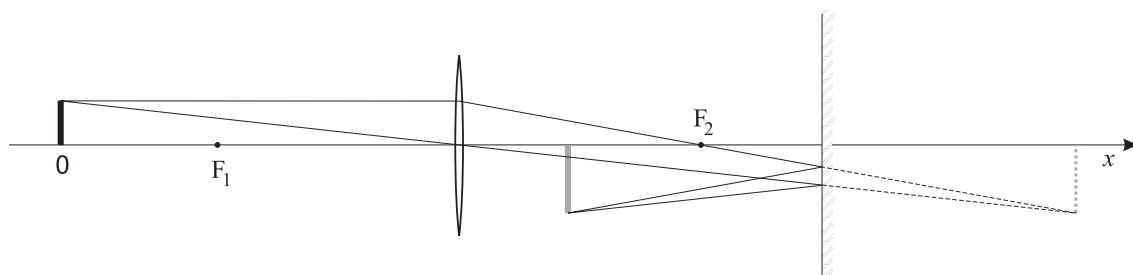
$$I_1 = -\frac{q_1}{p_1} = -1.55$$

$$\text{RIS} \Rightarrow -1.57 \leq I_1 \leq -1.53$$

NOTA per i correttori \Rightarrow Se lo studente ha riconosciuto che l'immagine è capovolta, è accettabile anche il valore 1.55.

Quesito n. 2.

Lo schema seguente mostra il percorso di due raggi che partono da un punto dell'oggetto, attraversano la lente e vengono riflessi dallo specchio.



Nel sistema di riferimento scelto, la posizione dello specchio è $x_S = p_1 + d = 62.9 \text{ cm}$. Esso viene quindi a trovarsi $x_0 - x_S = 21.0 \text{ cm}$ prima del punto in cui si formerebbe l'immagine in sua assenza e di conseguenza viene investito da un fascio convergente. In queste condizioni l'immagine trovata al punto 1 costituisce per lo specchio una sorgente virtuale, di cui esso fornisce un'immagine reale (v. figura sopra). Questa è posta alla stessa distanza, ma davanti allo specchio, cioè nella posizione

$$x_1 = x_S - 21.0 \text{ cm} = 41.9 \text{ cm}.$$

$$\text{RIS} \Rightarrow 41.3 \leq x_1 \leq 42.5 \quad [\text{cm}]$$

Come si vede dalla figura precedente, lo specchio modifica la posizione dell'immagine ma non le sue caratteristiche: questa prima immagine è dunque reale e capovolta.

Quesito n. 3.

Come si è visto, la prima immagine si forma nella posizione $x_1 = 41.9 \text{ cm}$, e dunque “prima” della lente (si tenga presente che ora i raggi luminosi procedono nel verso negativo dell'asse x). Essa costituisce quindi una sorgente reale per la lente, e si trova ad una distanza $p_2 = x_1 - x_L = 9.0 \text{ cm}$ da essa; la seconda immagine si formerà dunque ad una distanza q_2 data ancora dalla legge dei punti coniugati:

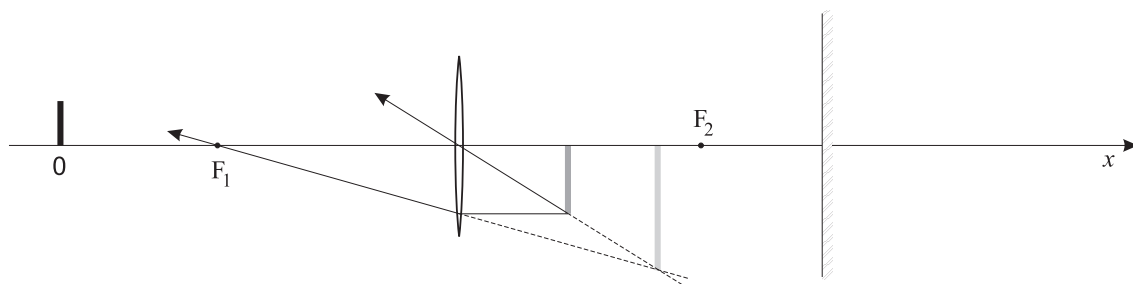
$$q_2 = \frac{f p_2}{p_2 - f} = -16 \text{ cm}$$

e dunque nella posizione $x_2 = x_L - q_2 = 49 \text{ cm}$ (v. figura seguente).

$$\text{RIS} \Rightarrow 44 \leq x_2 \leq 55 \quad [\text{cm}]$$

Il segno negativo di q_2 ci indica che questa seconda immagine è virtuale, come si poteva prevedere osservando che $p_2 < f$. Essa è dunque diritta rispetto alla sua sorgente (cioè la prima immagine), ma capovolta rispetto all'oggetto.

$$\text{L'ingrandimento rispetto alla sorgente è } I_2 = -\frac{q_2}{p_2} = 1.8$$



L'ingrandimento rispetto all'oggetto risulta quindi

$$I_{1'} = -\frac{h_2}{h_0} = -\left(-\frac{h_2}{h_1}\right)\left(-\frac{h_1}{h_0}\right) = -I_2 I_1 = -2.8$$

RIS \Rightarrow $-3.3 \leq I_{1'} \leq -2.4$

Quesito n. 4.

Lo specchio sferico dev'essere concavo per poter formare un'immagine reale dell'oggetto. Sia p_3 la distanza dell'oggetto dallo specchio e q_3 la distanza dallo stesso dell'immagine. Per avere un'immagine reale e capovolta, con le stesse dimensioni e nella stessa posizione, devono valere le seguenti relazioni relative all'ingrandimento e alla distanza ($q_3 - p_3$) tra sorgente e immagine

$$\frac{q_3}{p_3} = -I_1 \quad \text{e} \quad q_3 - p_3 = x_1$$

Da queste, risolvendo il sistema, si ricava

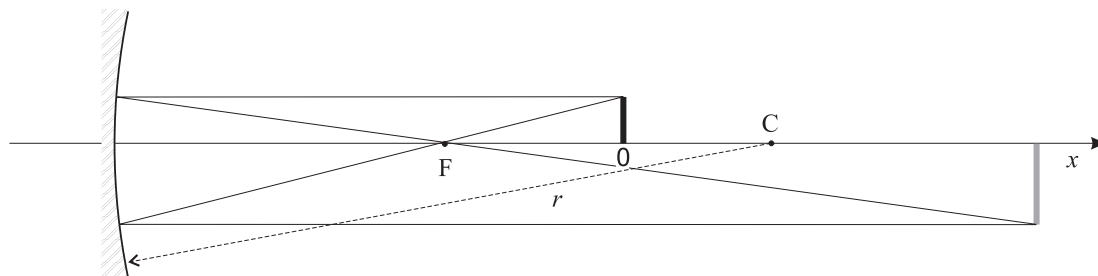
$$p_3 = -\frac{x_1}{I_1 + 1} = 76.1 \text{ cm} \quad \text{e} \quad q_3 = \frac{x_1 I_1}{I_1 + 1} = 118 \text{ cm}$$

Inoltre, per uno specchio sferico $r = 2f$ e quindi

$$\frac{1}{p_3} + \frac{1}{q_3} = \frac{2}{r} \quad \text{da cui} \quad r = \frac{2p_3 q_3}{p_3 + q_3} = \frac{2x_1 I_1}{1 - I_1^2} = 92.5 \text{ cm}$$

RIS \Rightarrow $89.0 \leq r \leq 96.2 \text{ [cm]}$

Nota aggiuntiva (non richiesta agli studenti)



Come mostrato nello schema qui sopra, affinché l'immagine si formi nella stessa posizione lo specchio dev'essere posto nel semiasse x negativo, e precisamente nella posizione

$$x_s = -p_3$$

PROBLEMA n. 2 – Sull'Ottovolante

Quesito n. 1.

Poiché la rotaia presenta attrito trascurabile, la condizione sulla velocità iniziale è data dalla conservazione dell'energia:

$$K_i + U_i = K_f + U_f \quad \Rightarrow \quad K_f = K_i + U_i - U_f \geq 0$$

$$K_i \geq U_f - U_i \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv_0^2 \geq mg \Delta h \quad \Rightarrow \quad v_0 \geq \sqrt{2g \Delta h}$$

Geometricamente si trova $\Delta h = 2R(1 - \cos \alpha)$ per cui $v_0 \geq 2\sqrt{Rg(1 - \cos \alpha)}$

Quesito n. 2.

Il carrello non si stacca dalla rotaia fin tanto che questa esercita una forza vincolare \vec{N} che, in assenza di attrito, ha direzione normale ed è diretta come in figura. Assumendo questo come verso positivo delle componenti normali alla rotaia, si può dire - in altro modo - che N può essere solo positiva: se questa condizione non si realizza non c'è forza vincolare e il carrello si stacca dalla rotaia.

Nel primo tratto, con la concavità verso l'alto, deve essere quindi

$$N - P_N = m a_c \Rightarrow N = P_N + m a_c$$

dove P_N è la componente del peso del carrello perpendicolare alla rotaia ed $a_c = v^2/R$ l'accelerazione centripeta necessaria a far percorrere al carrello la traiettoria fissata dalla rotaia; N risulta sempre positiva e questo assicura che in questo tratto il carrello non si stacca mai dalla rotaia.

Nel secondo tratto, appena superato il punto P, la condizione di contatto cambia dato che l'accelerazione centripeta deve essere diretta dalla parte opposta; si ha dunque

$$P_N - N = m a_c \Rightarrow N = P_N - m v^2/R$$

Adesso il valore di N potrebbe diventare (istantaneamente) negativo per un valore di velocità sufficientemente alto. Se così è il carrello si distacca appena superato il punto P; in caso contrario, se nel punto P v è tale che N sia positiva, il carrello non può staccarsi più perché, mentre il carrello continua a salire, la componente del peso perpendicolare alla rotaia aumenta mentre l'accelerazione centripeta diminuisce con la velocità del carrello; quindi N rimane positiva fino al punto più alto della rotaia.

Quesito n. 3.

Per quanto detto sopra il carrello non si distacca in nessun punto della rotaia se, nel punto P,

$$P_N - \frac{mv^2}{R} \geq 0.$$

La velocità nel punto P si ricava nuovamente con la conservazione dell'energia

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mgR(1 - \cos \alpha) \Rightarrow mv^2 = mv_0^2 - 2mgR(1 - \cos \alpha)$$

mentre $P_N = mg \cos \alpha$. Quindi

$$mg \cos \alpha - \frac{mv_0^2}{R} + 2mg(1 - \cos \alpha) \geq 0 \Rightarrow v_0 \leq \sqrt{Rg(2 - \cos \alpha)}$$

Quesito n. 4.

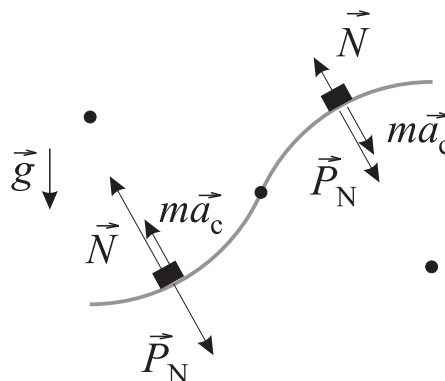
Per fare in modo che il carrello arrivi nel punto più alto della rotaia senza staccarsi, le due precedenti relazioni devono essere soddisfatte contemporaneamente

$$4Rg(1 - \cos \alpha) \leq v_0^2 \leq Rg(2 - \cos \alpha).$$

Affinché esistano valori di v_0 che soddisfano queste limitazioni dev'essere, evidentemente

$$4 - 4 \cos \alpha \leq 2 - \cos \alpha \Rightarrow \alpha \leq \alpha_{\max} = \arccos(2/3) \approx 48.2^\circ \quad \text{RIS} \Rightarrow \boxed{48.1 \leq \alpha_{\max} \leq 48.3 \quad [^\circ]}$$

Per angoli α maggiori del valore trovato, il carrello o si stacca dalla rotaia appena superato il punto P oppure non può arrivare nel punto più alto.



PROBLEMA n. 3 – Anello elettrico

Quesito n. 1.

Essendo conduttore, l'anello è uniformemente carico. Considerando un tratto sufficientemente piccolo $\Delta\ell$ dell'anello, esso contiene una carica Δq . Il potenziale ΔV generato dalla carica Δq (trattata come puntiforme) in un punto dell'asse a distanza x dal centro è dato da

$$\Delta V(x) = \frac{\Delta q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{r^2 + x^2}}.$$

Il potenziale totale, dovuto a tutto l'anello, è la somma dei potenziali di ciascuna carica Δq ed essendo $\sum \Delta q = Q$ è dato da

$$V(x) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{r^2 + x^2}}.$$

In altro modo, poiché ogni punto dell'asse è equidistante da tutti i punti dell'anello, il potenziale sull'asse non dipende dal punto in cui si trovano le singole cariche Δq sull'anello, per cui – limitatamente ai punti dell'asse – può essere calcolato direttamente pensando che tutta la carica Q sia concentrata in un punto qualsiasi dell'anello stesso. Ovviamente, però, se la carica sull'anello fosse distribuita in modo non uniforme, il campo elettrico sarebbe diverso e la traiettoria della particella in generale non sarebbe rettilinea.

Quesito n. 2.

La particella, lanciata dal punto P, riesce a oltrepassare l'anello se ha sufficiente energia cinetica per arrivare al centro O con velocità maggiore di zero. Poiché l'energia potenziale della particella (al centro dell'anello) è qV_O , l'energia totale nel punto P, $K + qV_P$, deve essere maggiore di qV_O .

Usando l'espressione del potenziale calcolata precedentemente, la relazione per la velocità iniziale minima si scrive

$$\frac{1}{2} m v_{\min}^2 = qV(0) - qV(d) = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} - \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{r^2 + d^2}} \quad \text{da cui}$$

$$m = \frac{2q}{v_{\min}^2} [V(0) - V(d)] = \frac{2qQ}{4\pi\epsilon_0 v_{\min}^2} \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + d^2}} \right] = 6.65 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

$$\text{RIS} \Rightarrow \boxed{6.59 \times 10^{-27} \leq m \leq 6.72 \times 10^{-27} \text{ [kg]}}$$

NOTA per i correttori \Rightarrow È accettabile anche una soluzione in cui le cariche Δq vengano identificate con cariche elementari positive.

PROBLEMA n. 4 – Luce sul Potassio

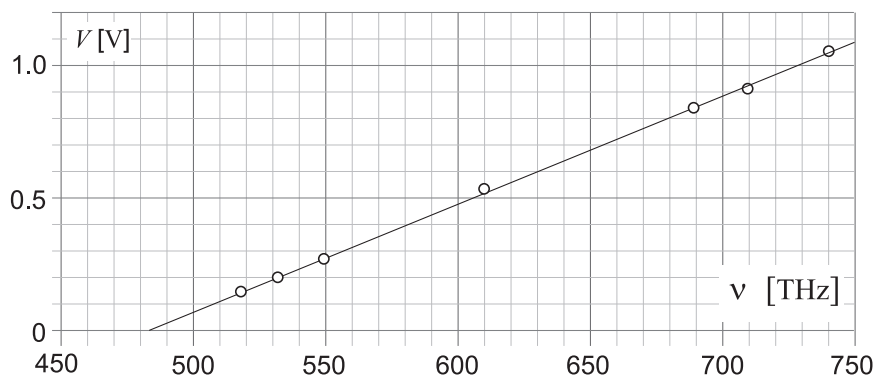
Quesito n. 1.

Secondo la relazione di Einstein un fotone avente frequenza ν trasporta una quantità di energia $E_f = h\nu$ ove h viene detta costante di Planck. Detto Φ il lavoro di estrazione del potassio, gli elettroni estratti dal fotocatodo (al più uno per ciascun fotone) hanno energia cinetica che al massimo è $K = h\nu - \Phi$ con cui possono superare una d.d.p. d'arresto V data da $eV = h\nu - \Phi$.

Secondo tale relazione V è una funzione lineare della frequenza. Conviene quindi riportare in grafico V in funzione di ν , piuttosto che di λ .

Nella seguente tabella sono riportati i dati necessari, usati nel grafico successivo.

Lunghezza d'onda [nm]	579	562	546	491	436	423	405
Frequenza [THz]	518	533	549	611	688	709	740
D.d.p. di arresto [V]	0.14	0.20	0.27	0.53	0.84	0.91	1.06

**Quesito n. 2.**

Utilizzando la relazione precedente, il lavoro di estrazione Φ è pari a $h\nu_0$ dove ν_0 è il valore della frequenza per cui $V = 0$. Estrapolando la retta ottenuta fino a trovare l'intersezione con l'asse delle ascisse, si ottiene $\nu_0 = 4.8 \times 10^{14}$ Hz. Da questa si ricava

$$\Phi = h\nu_0 = 3.2 \times 10^{-19} \text{ J} = 2.0 \text{ eV}.$$

RIS \Rightarrow

$$1.94 \leq \Phi \leq 2.03 \quad [\text{eV}]$$

Quesito n. 3.

La soglia fotoelettrica altro non è che la massima lunghezza d'onda, o la minima frequenza, per cui si ha effetto fotoelettrico; quindi corrisponde alla già identificata intersezione ν_0 della retta con l'asse delle ascisse, da cui si ricava $\lambda_0 = c/\nu_0 = 625 \text{ nm}$.

RIS \Rightarrow

$$612 \leq \lambda_0 \leq 638 \quad [\text{nm}]$$

Materiale elaborato dal Gruppo

	<p>PROGETTO OLIMPIADI Segreteria Olimpiadi Italiane della Fisica e-mail: segreteria@olifis.it - Tel. 0732 1966045 WEB: www.olifis.it</p>
--	---

NOTA BENE: È possibile utilizzare, riprodurre, distribuire, comunicare al pubblico questo materiale alle due seguenti condizioni: citare la fonte; non usare il materiale, nemmeno parzialmente, per fini commerciali.