PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA
U.M.I. UNIONE MATEMATICA ITALIANA
MINISTERO DELLA PUBBLICA ISTRUZIONE
SCUOLA NORMALE SUPERIORE

I Giochi di Archimede - Gara Biennio

27 novembre 2013

1) Die Arbeit besteht aus 16 Aufgaben. Für jede Frage stehen fünf Antworten zur Auswahl; sie sind mit den Buchstaben A, B, C, D, E gekennzeichnet.
2) Nur eine dieser Antworten ist richtig, die anderen vier sind falsch. Jede richtige Antwort zählt 5 Punkte, jede falsche 0 Punkte, jede Frage ohne Antwort 1 Punkt.
3) Für jede Aufgabe musst du den Buchstaben, der deiner Meinung nach zur richtigen Antwort gehört, in das unten stehende Raster eintragen. Löschungen oder Korrekturen sind NICHT erlaubt. DIE BENUTZUNG EINES TASCHENRECHNERS IST NICHT GESTATTET!

Für die gesamte Arbeit stehen dir 120 Minuten zur Verfügung.
Gute Arbeit und viel Vergnügen!

Vorname:__________________Nachname:________________________ Klasse:_______

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

1) Federico besitzt eine Sammlung von Zinnsoldaten. Er weiß, dass er etwas weniger als 100, aber sicher mehr als 30 besitzt. Er stellt sie in 7er-Reihen auf, dabei bleibt ein Zinnsoldat übrig; hernach stellt er sie in 10er-Reihen auf, diesmal bleiben zwei Zinnsoldaten übrig. Wie viele Zinnsoldaten besitzt er insgesamt?
(A) 32 **(B)** 50 **(C)** 62 **(D)** 71 **(E)** 92

2) Zwei Mathematiker unterhalten sich. Sagt der eine: „Gestern habe ich gelogen." Antwortet der andere: „Auch ich habe gestern gelogen." Man weiß, das einer der beiden immer montags, dienstags und mittwochs lügt (und nur an diesen Tagen), während der andere immer donnerstags, freitags und samstags (und nur an diesen Tagen) lügt. An welchem Wochentag hat dann die Unterhaltung stattgefunden?
(A) Montag **(B)** Donnerstag **(C)** Sonntag **(D)** so eine Unterhaltung kann nicht stattgefunden haben **(E)** es ist nicht möglich, den Wochentag eindeutig zu bestimmen.

3) Leo wirft 7 Mal eine – nicht gezinkte – Münze und erhält zwei Mal Kopf und fünf Mal Zahl. Wenn er die Münze nochmals wirft, so ist die Wahrscheinlichkeit für Kopf
(A) $\frac{1}{8}$ **(B)** $\frac{1}{7}$ **(C)** $1-\frac{1}{2^7}$ **(D)** $\frac{35}{2^7}$ **(E)** $\frac{1}{2}$

4) Andrea schreibt die Summe zweier dreistelliger Zahlen samt Ergebnis an. Dann tauscht sie jede Ziffer mit einem Buchstaben aus, wobei gleiche Buchstaben gleichen Ziffern zugeordnet und verschiedene Buchstaben für verschiedene Ziffern verwendet werden. Dadurch erhält sie:
TRE + TRE = SEI Demnach entspricht
(A) der Buchstabe E notwendigerweise einer geraden Zahl
(B) der Buchstabe S notwendigerweise einer geraden Zahl
(C) der Buchstabe E notwendigerweise einer ungeraden Zahl größer als 4
(D) der Buchstabe E notwendigerweise einer geraden Zahl kleiner als 5
(E) keine der vorhergehenden Aussagen ist wahr.

5) Bis 2013 bestand die Bevölkerung der Gefangenenkolonie von Zoranel zu 60 % aus Robotern, 5 % davon waren für die Bewachung zuständig. Bezeichnen wir mit *q* den prozentuellen Anteil der Bewachungsroboter bezogen auf die Gesamtbevölkerung jenes Jahres. 2014 ist die Bevölkerung der Gefangenenkolonie um 10 % angestiegen, da *N* verbannte Personen aufgenommen wurden. Um wie viel verringerte sich der prozentuelle Anteil der Bewachungsroboter bezogen auf die Gesamtbevölkerung?
(A) er änderte sich nicht **(B)** weniger als ein Zehntel von *q* **(C)** mehr als ein Zehntel von *q* **(D)** hängt von *N* ab **(E)** hängt von der Größe der Anfangsbevölkerung ab.

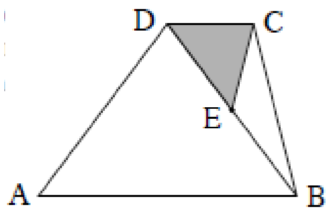
6) An einer Tagung nehmen 30 Wissenschaftler teil, wovon jeder entweder Mathematiker oder Physiker oder Biologe oder Chemiker ist. Physiker und Biologen gemeinsam entsprechen der Hälfte der Mathematiker, Physiker und Chemiker gemeinsam gibt es doppelt so viele wie Biologen. Es gibt mindestens einen Physiker. Wie viele Mathematiker sind anwesend?
(A) 6 **(B)** 10 **(C)** 12 **(D)** 15 **(E)** 18

7) In eine Tabelle mit 2 Zeilen und 1007 Spalten schreiben wir in die erste Zeile alle Zahlen von 1 bis 1007 in aufsteigender Reihenfolge, in die zweite Zeile alle Zahlen von 1008 bis 2014 ebenfalls in aufsteigender Reihenfolge. Betrachten wir nun die Tabelle als 1007 Zahlenpaare, die untereinander angeschrieben sind. Bei wie vielen Zahlenpaaren ist die Zahl aus der 2. Zeile ein Vielfaches der darüber liegenden Zahl?
(A) 2 **(B)** 3 **(C)** 4 **(D)** 5 **(E)** 6

8) Alberto hat 756 Kirschen vom Baum seines Großvaters gepflückt. Er teilt sie gerecht auf sich und seine Freunde auf. Drei davon haben keinen großen Hunger und geben Alberto ein Viertel der Kirschen, die sie erhalten haben, wieder zurück. Alberto – mit einem eisernen Magen – verspeist nach den eigenen auch noch die zurückgegebenen Kirschen. Am Ende bemerkt er, nicht weniger als 150 Kirschen gegessen zu haben. Wie viele hat er genau verspeist?
(A) 150 **(B)** 189 **(C)** 210 **(D)** 231 **(E)** 270

9) Sei n eine natürliche Zahl mit 6 positiven ganzzahligen Teilern. Wie viele positive ganzzahlige Teiler hat dann n^2? N.B. zu den Teilern einer Zahl gehören auch die 1 und die Zahl selbst.
(A) 11 **(B)** 12 **(C)** 15 **(D)** 36 **(E)** die Antwort hängt von n ab.

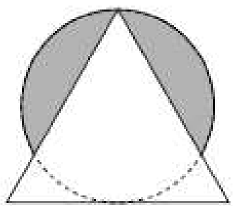
10) In einem Trapez $ABCD$ misst die längere Grundseite AB das Dreifache der kürzeren Grundseite CD. Sei E der Mittelpunkt der Diagonalen BD. Wie groß ist das Verhältnis zwischen der Fläche des Dreiecks CDE und der Fläche des Trapezes?



(A) $\frac{1}{3}$ **(B)** $\frac{1}{6}$ **(C)** $\frac{1}{8}$ **(D)** $\frac{1}{12}$
(E) kann aus den angegebenen Daten nicht bestimmt werden.

11) Wie lange ist der kürzeste Weg, der durch alle Eckpunkte eines Würfels mit Kantenlänge 1 m verläuft? N.B. Der Weg kann auch im Inneren des Würfels verlaufen.
(A) 6 m **(B)** 7 m **(C)** $(6+\sqrt{2})$ m **(D)** $(6+\sqrt{3})$ m **(E)** 8 m

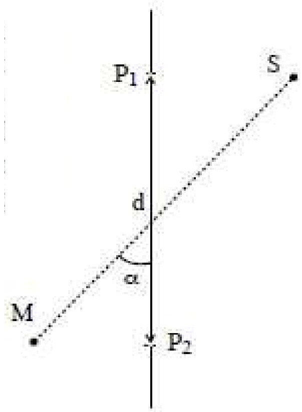
12) Eine Skulptur moderner Kunst zeigt einen Kreis, der zum Teil von einem gleichseitigen Dreieck verdeckt wird (wie in der Abbildung). Der Durchmesser des Kreises ist gleich groß wie die Höhe des Dreiecks, welche $\sqrt{6}$ m misst. Wie groß ist der Flächenanteil des Kreises, welcher nicht vom Dreieck verdeckt wird?



(A) $(\frac{3}{2}\pi-\frac{8}{\sqrt{3}})$ m² **(B)** $\frac{\pi}{2}$ m² **(C)** $(\pi-\frac{3\sqrt{3}}{4})$ m² **(D)** $(\frac{3}{2}\pi-\frac{9\sqrt{3}}{8})$ m²
(E) $\frac{3}{2}\pi$ m²

13) In einer Urne befinden sich 8 blaue und 7 rote Kugeln. Mirco zieht zwei Kugeln hintereinander ohne die erste Kugel wieder in die Urne zu legen bevor er die zweite Kugel zieht. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die beiden Kugeln dieselbe Farbe besitzen?
(A) $\frac{1}{4}$ **(B)** $\frac{1}{2}$ **(C)** $\frac{7}{15}$ **(D)** $\frac{8}{15}$ **(E)** keine der vorhergehenden

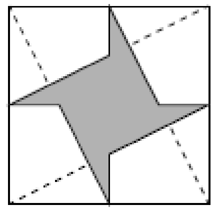
14) Stefan und Maria (S und M im Bild) sind von einer langen Mauer getrennt, welche um einen Winkel α bezüglich ihrer Verbindungslinie geneigt ist (mit $0 < \alpha < 90°$). In den Stefan und Maria am nächsten gelegenen Punkten P_1 und P_2 der Mauer befinden sich zwei Türen, die im Abstand $d > 0$ voneinander entfernt sind. Stefan und Maria befinden sich 10 m bzw. 8 m von der ihnen am nächsten gelegenen Tür entfernt. Welche der beiden Türen sollte Stefan durchschreiten um Maria über den kürzesten Weg zu erreichen?



(A) Tür P_1 **(B)** Tür P_2 **(C)** es ist egal **(D)** hängt vom Abstand d zwischen den Türen ab **(E)** hängt von der Neigung α der Mauer ab.

15) Welcher ist der Koeffizient von x^{199} in $(x^2+x+1)^{100}$?
(A) 100 **(B)** 298 **(C)** 4950 **(D)** 5050 **(E)** 99²

16) Berechne die Fläche der grau schraffierten Figur in der Abbildung. Die Seitenlänge des Quadrates beträgt 2 m, die Spitzen des Sterns fallen genau auf die Seitenmittelpunkte des Quadrats.



(A) 1 m² **(B)** 2 m² **(C)** $\frac{1}{2}$ m² **(D)** π m² **(E)** $2\sqrt{2}$ m²