Simulation Dezember 2018

Realgymnasien

Version vom 21. Januar 2019

Lösung: **Problemstellung 1**

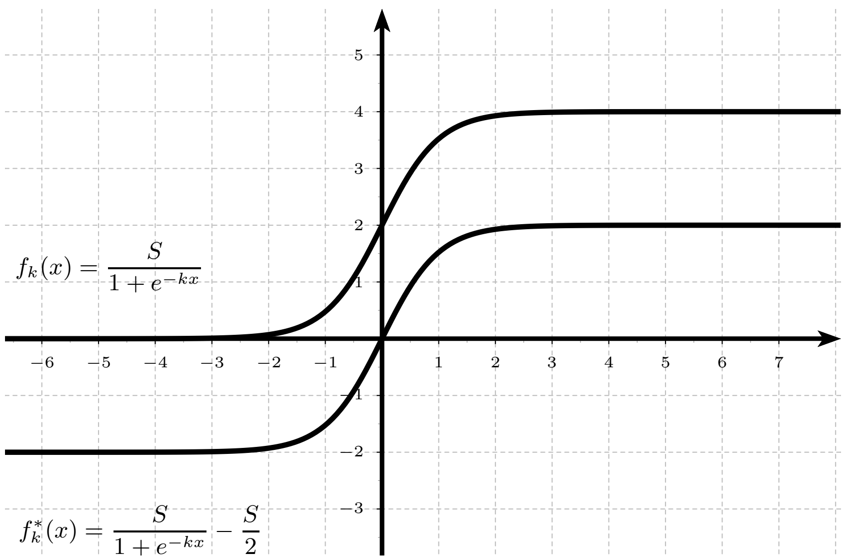
1. Zu zeigen: $0 < f_k(x) < S$:

   (a) $f_k(x)$ ist immer größer als Null, da der Zähler laut Voraussetzung immer positiv ist und auch die Funktion e^z immer positive Werte annimmt, also $1 + e^{-kx}$ immer positiv ist.

   (b) Aus $f_k(x) < S$ folgt durch Multiplikation (mit $1 + e^{-kx} > 0$): $S < S + S \cdot e^{-kx}$ und daraus $0 < S \cdot e^{-kx}$. Beide Faktoren sind jeweils positiv und echt größer als Null und damit ist auch diese Ungleichung immer wahr.

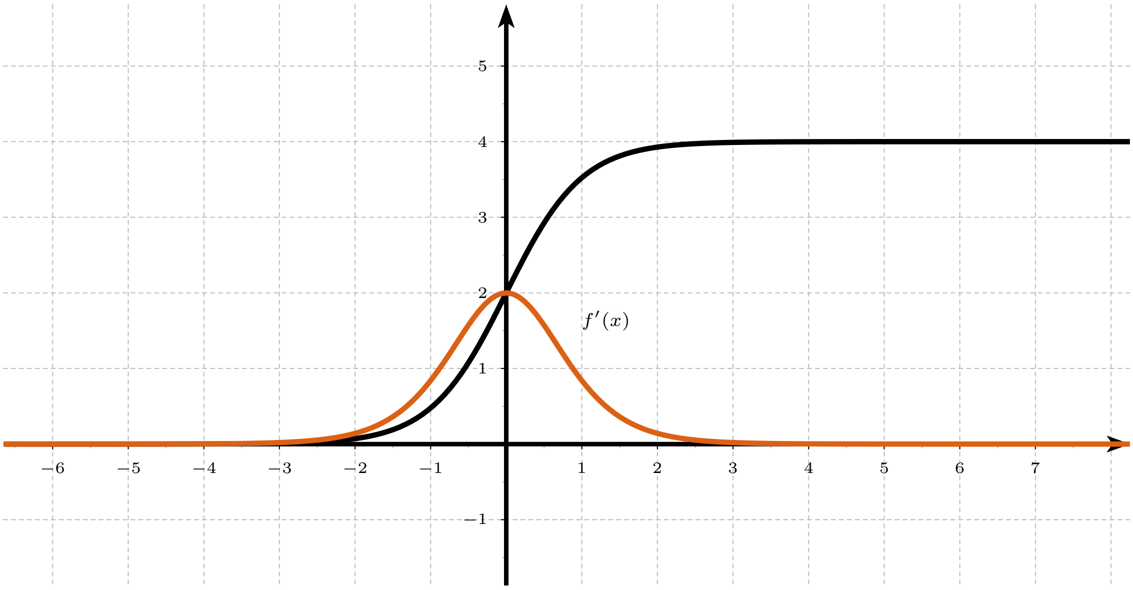
   Alternativer Lösungsweg: man berechnet die Grenzwerte für $x \to \pm\infty$, kommt dabei auf die Werte 0 und S und zeigt über $f'(x) > 0$, dass die Funktion streng monoton steigend ist.

2. Es ist $f_k(0) = \frac{S}{2}$. Verschiebt man den Graphen um diesen Wert nach „unten“, so ergibt sich $f_k^*(x) = f_k(x) - \frac{S}{2}$ (vgl. Abbildung)

   Um zu zeigen, dass die Funkion $f_k^*(x)$ ungerade ist, könnte man zeigen, dass $f(-x) = -f(x)$ gilt.

3. Der größte Zuwachs befindet sich beim steilsten Anstieg, also bei der größten Tangentensteigung, dies ist (aus obigen Symmetriegründen) bei $x = 0$ der Fall. Es ist schließlich das Maximum der Ableitung gesucht:

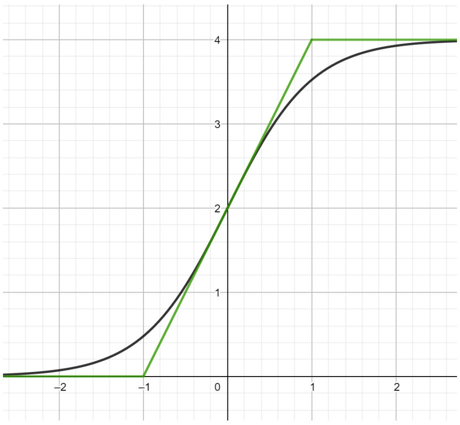


Aus $f'(x) = \dfrac{Ske^{-kx}}{(1+e^{-kx})^2}$ folgt $f'(0) = \frac{S\cdot k}{4}$ für den größten Zuwachswert.

4. Die lineare Funktion hat den y-Achsenabschnitt $\frac{S}{2}$ und die Steigung $k = f_k'(0) = \frac{S\cdot k}{4}$ und damit die Funktionsgleichung

$$y = \begin{cases} 0 \quad \text{für } x < \frac{-2}{k} \\ \frac{S\cdot k}{4} \cdot x + \frac{S}{2} \quad \text{für} \frac{-2}{k} \leqq x \leqq \frac{2}{k} \\ S \quad \text{für } x > \frac{2}{k} \end{cases}$$

5. In einer Umgebung von 0 liegen beide Werte sehr gut nahe einander, hier kann g durchaus für eine Approximation von f_k genutzt werden.



Die größten Unterschiede zwischen den Funktionswerten f_k und g ergeben sich in den Ecken von g, also an den x-Werten, für die $S = g(x)$ und $0 = g(x)$ gilt, diese sind unabhängig von S und liegen bei $x = \pm\frac{2}{k}$. Da die Funktionen bezüglich des Punktes $\left(0, \frac{S}{2}\right)$ symmetrisch liegen, reicht es eine Stelle, beispielsweise $x = +\frac{2}{k}$ zu betrachten.

Betrachtet man das Verhältnis

$$\frac{f_k\left(\dfrac{2}{k}\right)}{g\left(\dfrac{2}{k}\right)} = \frac{\dfrac{S}{1+e^{-2}}}{S} = \frac{1}{1+e^{-2}} \approx 0{,}88$$

so erkennt man, dass man bei dieser Approximation maximal 12% an Abweichungen erhalten wird.

6. Die Approximation wird für größere Werte von k dauernd besser, da das Intervall $\left[-\frac{2}{k}; \frac{2}{k}\right]$ kleiner

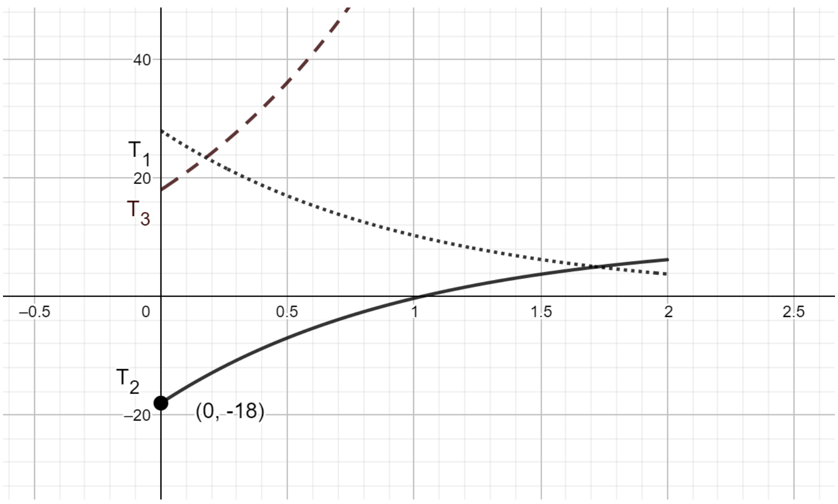
wird und so die Funktion f_k in diesem Intervallbereich sich der Tangentengleichung $y = \frac{Sk}{4}x + \frac{S}{2}$ um den Wert $x = 0$ immer besser „anschmiegt“.

Problemstellung 2

1. Bei gleicher Raumhöhe haben Rechtecke, die senkrecht auf der Grundebene stehen (also einfache Quader), die kleinste Flächenhöhe. (Umgekehrt ist bei gegebener Flächenhöhe die Raumhöhe optimal.) Deshalb reicht es bei dieser Aufgabe untern den Quadern das optimale (schiefe) Prisma zu finden.

   Zielfunktion: $O(b,h) = 2b^2 + 4bh$, Nebenbedingung: $V = b^2h = 10$. Formt man die Nebenbedingung nach h um und setzt den Term in die Zielfunktion ein, so erhält man aus $O'(b) = 0$ die Lösung $b = \sqrt[3]{10}$ und daraus den selben Wert für h. Da $O''(\sqrt[3]{10}) > 0$ ist handelt es sich dabei um das gesuchte Minimum. Der Ideale Block mit kleinster Oberfläche hat also die Form eines Würfels.

2. Zum Zeitpunkt $t = 0$ soll die Temperatur des Eisblocks $-18°$ betragen, dies ist nur bei der Funktion T_2 der Fall. Allein deshalb scheiden die anderen beiden vorgeschlagenen Funktionsterme aus (vgl. Abbildung).



   Damit der Block nicht in den 2 Minuten zu schmelzen beginnt, muss die Temperatur in dieser Zeit unter 0 bleiben, d.h. also es muss $T_2(2) < 0$ sein.

   Mit den gegeben Werten ergibt sich $T_2(x) = 10 - 28e^{-kx}$ und damit die Ungleichung $10 - 28e^{-2k} < 0$ mit der Lösung
$$k = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{14}\right) \approx 0{,}515$$

3. Ein um 10

   (a) Für kleine positive Werte von k (Beispieltabelle 1: $k = 0{,}2$) ist ein Einfluss vorhanden, dieser bewegt sich im zu untersuchenden Intervall $[T_2 - 10\%; T_2 + 10\%]$.

	k						
	0,2					proz.Änderung bei	
Zeitpunkt x	T_2(x)	T[k+10%](x)	T[k-10%](x)	T[k+10%](x)/T_2(x)	T[k-10%](x)/T_2(x)	k+10%	k-10%
0	-18,00	-18,00	-18,00	1,00	1,00	0,0%	0,0%
0,5	-15,34	-15,08	-15,59	0,98	1,02	1,6%	1,7%
1	-12,92	-12,47	-13,39	0,96	1,04	3,5%	3,6%
1,5	-10,74	-10,13	-11,37	0,94	1,06	5,7%	5,9%
2	-8,77	-8,03	-9,53	0,92	1,09	8,4%	8,7%

   (b) Nähert sich k dem obigen Wert von $k = -\frac{1}{2}\ln(5/14) \approx 0{,}515$ so wird der Einfluss für Werte nahe bei $t = 2$ sehr sehr groß. Hier ist es einfach die Frage ob die Temperatur über Null Grad ansteigt und der Schmelzprozess beginnt oder eben nicht. (Beispieltabelle 2: $k = -\frac{1}{2}\ln(5/14)$)

	k						
	0,514809709					proz.Änderung bei	
Zeitpunkt x	T_2(x)	T[k+10%](x)	T[k-10%](x)	T[k+10%](x)/T_2(x)	T[k-10%](x)/T_2(x)	k+10%	k-10%
0	-18,00	-18,00	-18,00	1,00	1,00	0,0%	0,0%
0,5	-11,65	-11,10	-12,21	0,95	1,05	4,7%	4,8%
1	-6,73	-5,89	-7,62	0,88	1,13	12,5%	13,1%
1,5	-2,94	-1,97	-3,97	0,67	1,35	32,7%	35,4%
1,99	-0,05	0,93	-1,14	-17,96	22,01	1896,3%	2100,9%

(c) Auch für negative Werte für k wird der Einfluss sehr groß, da der Term e^{-kx} dann eben exponentiell zunimmt und auch schon in den ersten 2 Minuten großen Einfluss nimmt. (Beispieltabelle 3: $k = -2$)

	k						
	-2					proz.Änderung bei	
Zeitpunkt x	T_2(x)	T[k+10%](x)	T[k-10%](x)	T[k+10%](x)/T_2(x)	T[k-10%](x)/T_2(x)	k+10%	k-10%
0	-18,00	-18,00	-18,00	1,00	1,00	0,0%	0,0%
0,5	-66,11	-74,12	-58,87	1,12	0,89	12,1%	11,0%
1	-196,89	-242,70	-159,39	1,23	0,81	23,3%	19,0%
1,5	-552,40	-749,15	-406,63	1,36	0,74	35,6%	26,4%
2	-1518,75	-2270,62	-1014,75	1,50	0,67	49,5%	33,2%

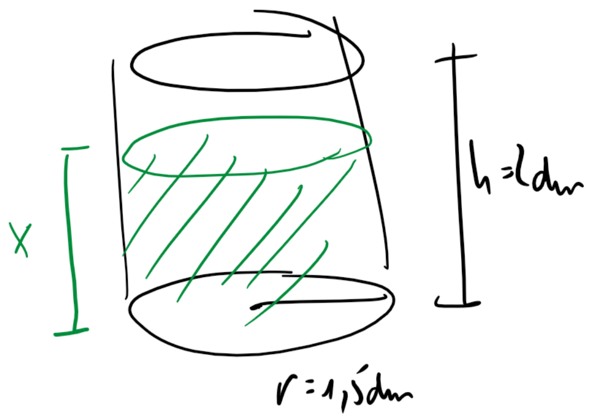
(d) Je größer k wird nimmt der Einfluss auf den Funktionsterm sehr rasch ab, da e^{-kx} gegen 0 geht und so die Funktionswerte sich kaum mehr ändern und der (dann geschmolzene) Eisblock einfach die 10° Raumtemperatur erreicht hat und dann so gut wie keine Änderung mehr vorhanden ist. (Beispieltabelle 4: $k = 7$)

	k						
	7					proz.Änderung bei	
Zeitpunkt x	T_2(x)	T[k+10%](x)	T[k-10%](x)	T[k+10%](x)/T_2(x)	T[k-10%](x)/T_2(x)	k+10%	k-10%
0	-18,00	-18,00	-18,00	1,00	1,00	0,0%	0,0%
0,5	9,15	9,40	8,80	1,03	0,96	2,7%	3,9%
1	9,97	9,99	9,95	1,00	1,00	0,1%	0,3%
1,5	10,00	10,00	10,00	1,00	1,00	0,0%	0,0%
2	10,00	10,00	10,00	1,00	1,00	0,0%	0,0%

(e) Andere Werte können auch einen „zwischenzeitlich" erheblichen Einfluss nehmen, beispielsweise für $k = 1$ ist nach einer Minute $t = 1$ die Änderung sehr groß, diese nimmt dann aber wieder ab. (Beispieltabelle 5: $k = 1$) Der Grund liegt ähnlich dem 2. Fall darin, dass die Werte nahe um der x-Achse liegen und verschiedene Vorzeichen haben (Schmelzprozess begonnen oder eben nicht).

	k						
	1					proz.Änderung bei	
Zeitpunkt x	T_2(x)	T[k+10%](x)	T[k-10%](x)	T[k+10%](x)/T_2(x)	T[k-10%](x)/T_2(x)	k+10%	k-10%
0	-18,00	-18,00	-18,00	1,00	1,00	0,0%	0,0%
0,5	-6,98	-6,15	-7,85	0,88	1,12	11,9%	12,5%
1	-0,30	0,68	-1,38	-2,26	4,60	326,1%	360,4%
1,5	3,75	4,62	2,74	1,23	0,73	23,2%	26,9%
2	6,21	6,90	5,37	1,11	0,86	11,1%	13,5%

4. Das Volumen des Zylinders beträgt $V_Z = \frac{9\pi}{2} \approx 14{,}137$. Da $\frac{V_Z}{1{,}0905} = \frac{3000\pi}{727} \approx 12{,}96 > 10$ gilt, ist der Behälter groß genug die notwendige Wassermenge für die $10 dm^3$ großen Eisblöcke zu enthalten.

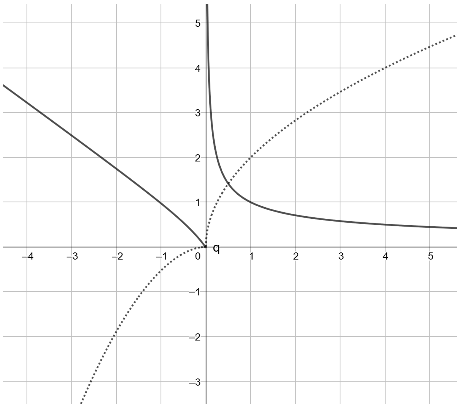


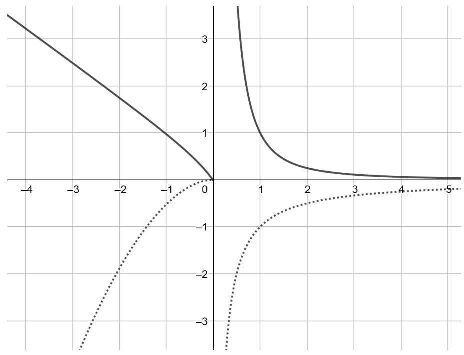
Aus der Gleichung $1{,}5^2 \cdot x \cdot \pi \cdot 1{,}0905 = 10$ erhält man für $x = \frac{80000}{19629\pi} \approx 1{,}29731$ die gesuchte

Füllhöhe.

Frage 1

Für $x \to 0^-$ ist die Ableitung definiert und gleich Null. Für $x \to 0^+$ geht die Ableitung hingegen gegen $+\infty$. Daraus lässt sich schließen, dass die Ableitung bei $x = 0$ nicht existiert. Die Funktion f kann (muss aber nicht) an dieser Stelle stetig sein, sie ist aber sicher nicht differenzierbar, da der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ nicht existiert. Der Graph von f kann dort eine „Ecke“ (Knick) haben (Beispiel für eine stetige, aber nicht differenzierbare Funktion - Abbildung links - f_1), der Graph kann aber auch eine Sprungstelle (Beispiel für eine weder stetige noch differenzierbare Funktion f_2).





Es sei $q(x)$ eine für $x < 0$ „passende“ Funktion, dann ergibt sich mit

$$f_1(x) = \begin{cases} q(x) & \text{für } x \leqq 0 \\ 2\sqrt{x} & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

die linke Abbildung und für

$$f_2(x) = \begin{cases} q(x) & \text{für } x \leqq 0 \\ -\dfrac{1}{x} & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

die rechte Abbildung.

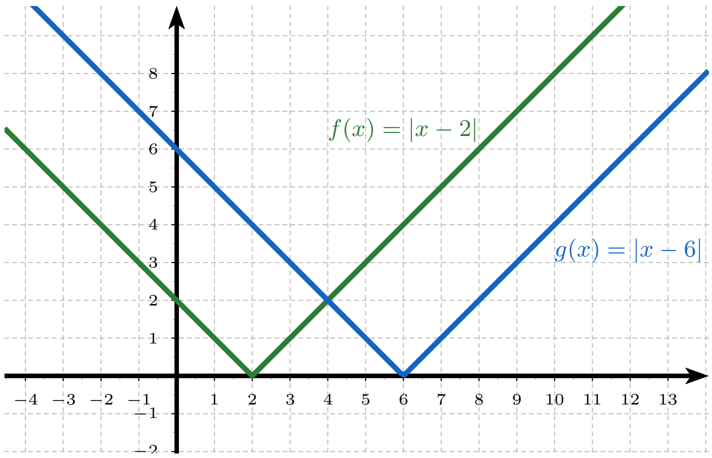
Frage 2

Es ist $f'(x) = -\dfrac{k}{(x-k)^2}$ und $f'(0) = -\dfrac{1}{k}$.

Aua $\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{k}$ folgt

$$k = -\sqrt{3} \approx -1{,}732$$

Frage 3



Wie man aus dem Graphen ablesen kann ist die Ungleichung für $x > 4$ erfüllt. Also:

$$L =]4; \infty[$$

Frage 4

Es sei x die Seitenlänge des Quadrates. Der Viertelkreis links ist also gleich der Hälfte der Quadratfläche, also

$$\frac{R^2 \cdot \pi}{4} = \frac{x^2}{2}$$

Weiters ist rechts die Kreisfläche halb so groß wie die Quadratfläche, also

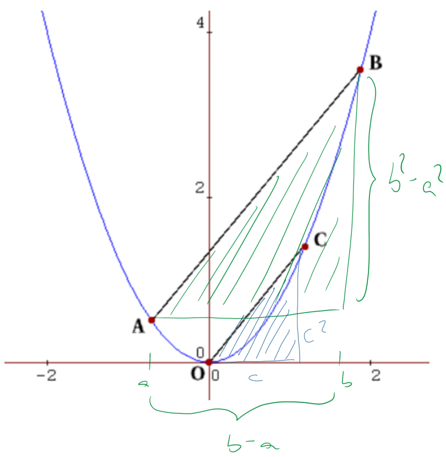
$$r^2 \pi = \frac{x^2}{2}$$

Durch Gleichsetzen und Umformen erhält man die gewünschte Beziehung:

$$\begin{aligned} \frac{R^2 \cdot \pi}{4} &= r^2 \pi \\ R^2 &= 4r^2 \\ \frac{R}{r} &= 2 \end{aligned}$$

Frage 5

Da die beiden Geraden parallel sind, müssen die Steigungen der Geraden gleich groß sein.



Es gilt also: $\dfrac{b^2-a^2}{b-a} = \dfrac{c^2}{c}$ und damit die Behauptung $b+a=c$.

Der Mittelpunkt auf der Strecke OC hat die $x-$Koordinate $\frac{c}{2}$.

Der Mittelpunkt auf der Strecke AB hat die $x-$Koordinate $a+\frac{b-a}{2}=\frac{a+b}{2}$.

Der Mittelpunkt auf einer weiteren parallelen Strecke DE hat die $x-$Koordinate $d+\frac{e-d}{2}=\frac{e+d}{2}$.

Die Gerade durch DE hat die Steigung $\dfrac{e^2-d^2}{e-d} = e+d$.

Alle 3 Geraden haben dieselbe Steigung, also gilt: $c=a+b=e+d$. Dividiert man diese Gleichung durch 2, so erhält man die Aussage, dass die x-Koordinaten der obigen Mittelpunkte alle genau gleich sind und deshalb alle auf einer (zur y-Achse parallelen) Geraden liegen.

Frage 6

Die Kurvenschar $f(x) = a\cdot(x-10)(x-100)(x-1000)$ erfüllt die Bedingung für $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Während die x-Koordinate des Wendepunktes unabhängig von a bestimmbar wäre, ist die y-Koordinate des Wendepunktes natürlich abhängig von a und somit nicht eindeutig bestimmbar. Deshalb ist die Frage durch diese Begründung mit nein zu beantworten.

Frage 7

Aus der Ebenengleichung kann der Richtungsvektor derjenigen Geraden g direkt abgelesen werden, welche durch den Punkt K verläuft und senkrecht auf Π steht:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

Schneidet man diese Gerade mit der Ebene, so erhält man $\lambda=-\frac{1}{2}$ und durch Einsetzen in die Geradengleichung den Berührungspunkt:

$$B = \left(\frac{1}{2}|1|\frac{1}{2}\right)$$

Aus $r=|\vec{BK}|$ ergibt sich der Wert für den Radius

$$r=\sqrt{\frac{3}{2}}$$

Frage 8

Nein, die Wahrscheinlichkeit ist kleiner als 50%: Es gibt 6 „günstige“ Möglichkeiten: KKZZ, KZKZ, KZZK, ZKKZ, ZKZK, ZZKK Es gibt insgesamt $2^4=16$ „mögliche“ Ausgänge, deshalb liegt die geforderte Wahrscheinlichkeit bei

$$\frac{6}{16}=\frac{3}{8}\neq\frac{1}{2}$$