# Simulation Dezember 2018

Realgymnasien

Version vom 21. Januar 2019

## 1 2019 Simulation Dezember 2018

### 2019 Simulation Dezember 2018 Problemstellung 1

Gegeben seien zwei reelle Parameter $S > 0$ und $k > 0$. Betrachten Sie die Funktion

$$f_k(x) = \frac{S}{1 + e^{-kx}}$$

deren Graph mit $\Gamma_k$ bezeichnet wird.

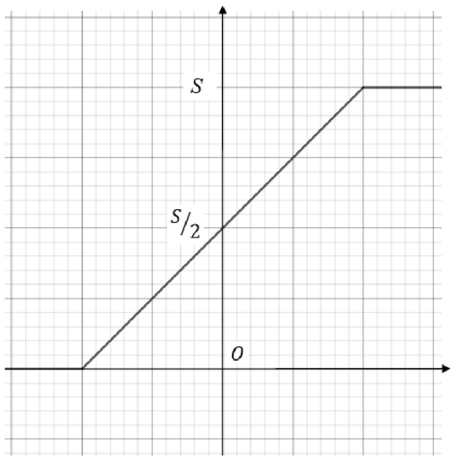
Die Funktion $f_k(x)$ kann verwendet werden, um die mögliche zeitliche Entwicklung einer Population, die sich vermehren (fortplanzen) kann, zu untersuchen. Unter der Annahme begrenzter verfügbarer Ressourcen existiert eine „Kapazitätsgrenze“, unter der sich die Population halten muss.

1. Zeigen Sie, dass sich die Werte, die die Funktion $f_k(x)$ annimmt, innerhalb des offenen Intervalls mit unterer Grenze 0 und oberer Grenze $S$ befinden. $S$ stellt dabei die Kapazitätsgrenze dar.

2. Finden Sie die geometrische Transformation, die auf $\Gamma_k$ anzuwenden ist, sodass der Graph eine punktsymmetrische Funktion darstellt und bestimmen Sie die analytische Darstellung dieser Funktion (Zuordnungsvorschrift).

3. Finden Sie graphisch oder analytisch den Wert von $x$, für den die Wachstumsgeschwindigkeit in dem Modell, das durch $f_k(x)$ beschrieben wird, maximal ist. Bestimmen Sie anschließend den Wert dieser maximalen Geschwindigkeit in Abhängigkeit von $S$ und $k$.

Sie sollen eine Untersuchung einer Bakterienkultur in einem Umfeld mit begrenzten Ressourcen durchführen. Sie wollen die Berechnungen vereinfachen und planen die Funktion $f_k(x)$ durch eine Funktion $g_k(x)$ anzunähern, deren Graph in folgender Abbildung angegeben ist.




Die Werte von $g_k(x)$ steigen von 0 auf $S$ linear an, wobei die Steigung gleich der Steigung von $\Gamma_k$ an der Stelle mit Abszisse 0 ist.

4. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $S$ und $k$ die Funktionsgleichung von $g_k(x)$.

5. Erläutern Sie die Methode, die Sie anwenden würden, um die Berechtigung der Annäherung von $f_k(x)$ durch $g_k(x)$ zu bewerten.

6. Wird diese Annäherung besser, wenn man $k$ vergrößert? Begründen Sie Ihre Antwort.

## 2016 Simulation Dezember 2018 Problemstellung 2

Im Rahmen der Zusammenarbeit „Schule-Arbeitswelt“ hat Ihr Gymnasium für die Maturanten eine Aktivität in der Firma „ICE EXPRESS“, die sich in Ihrer Region befindet, organisiert. Bei der Ankunft wurden Sie in verschiedene Gruppen aufgeteilt. Nachdem Ihre Gruppe das Werk und die Laboratorien besichtigt hat, nehmen Sie an einer Sitzung teil, in welcher Produktionsprozesse besprochen werden.

Ein Kunde hat eine Lieferung von Eisblöcken bestellt, die die Form eines Quaders mit quadratischer Grundfläche und einem Volumen von $10dm^3$ haben sollen. Sie sollen einen minimalen Wärmeaustausch mit der äußeren Umgebung haben, so dass sie möglichst lange halten, bevor sie schmelzen.

Da man weiß, dass der Wärmeaustausch zwischen den Eisblöcken und der Umgebung über die Oberfläche erfolgt, wird Ihre Gruppe beauftragt, die geometrischen Abmessungen der zu produzierenden Blöcke zu bestimmen.

1. Bestimmen Sie den Wert der Grundkante $b$ des Quadrates und die zugehörige Höhe $h$, so dass der Wärmeaustausch minimal wird. Das Volumen muss dabei $10\,dm^3$ betragen.

Am Ende des Produktionsprozesses besitzt der Eisblock eine Temperatur von $-18\,°C$. Er wird auf ein Förderband gelegt, das ihn zu einem Kühltransporter bringt. Dabei wird er zwei Minuten lang einer Umgebung ausgesetzt, die auf einer Temperatur von $10\,°C$ gehalten wird. Der Eisblock neigt allerdings dazu sich mit laufend abnehmender Geschwindigkeit zu erwärmen und zwar in Funktion der Temperaturdifferenz zur Umgebung und beginnt zu schmelzen, wenn er während des Transportweges eine Temperatur von $0°C$ erreicht.

2. Bestimmen Sie, welche der folgenden Funktionen am geeignetsten ist, die Erwärmung des Eisblockes zu beschreiben, bevor er zu Schmelzen beginnt. Begründen Sie Ihre Wahl! ($T_U$=Umgebungstemperatur, $T_E$=Temperatur des Eisblocks zum Zeitpunkt $t = 0$, $T(t)$=Temperatur des Eisblocks zum Zeitpunkt $t$, wobei $t$ die Zeit seit Beginn der Erwärmung in Minuten ist):

$$\begin{aligned} T(t) &= (T_U - T_E) \cdot e^{-kt} \\ T(t) &= (T_U - T_E) \cdot (1 - e^{-kt}) + T_E \\ T(t) &= (T_U - T_E) \cdot e^{kt} - T_U \end{aligned}$$

   Bestimmen Sie den Wert des Parameters $k$, so dass der Eisblock während der Transportzeit zum Kühllastwagen nicht zu schmelzen beginnt.

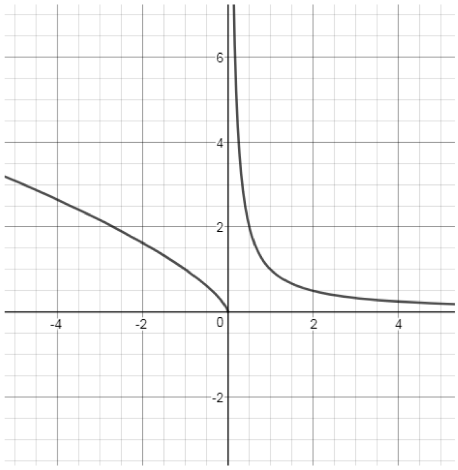
3. Da der Parameter $k$ aufgrund verschiedener Produktionsfaktoren variiert, besteht eine Unsicherheit von 10% für seinen wahren Wert. Besteht daher auch eine Unsicherheit von 10% für die Temperatur $T$, wenn der Eisblock den Transporter erreicht? Begründen Sie Ihre Antwort qualitativ oder quantitativ.

Der Betrieb verwendet für gewöhnlich zylindrische Behälter, um das Wasser, das für die Produktion eines einzelnen Eisblockes benötigt wird, aufzubewahren. Der Zylinder besitzt einen Grundkreisradius von $1{,}5\,dm$ und eine Höhe von $2\,dm$.

4. Wenn man weiß, dass die Volumszunahme beim Gefrieren 9,05% beträgt, reicht dann der zylindrische Behälter für das Wasser aus, das man für die Produktion der bestellten Eisblöcke benötigt? Wenn das der Fall ist, wie hoch muss die Füllhöhe des Wassers im Behälter sein?

### 2019 Simulation Dezember 2018 Frage 1

In der Abbildung ist der Graph der Funktion $f'(x)$, also die Ableitung von der Funktion $f(x)$ gezeichnet. Der Graph hat bei $x = 0$ eine vertikale Asymptote. Nehmen Sie an, dass die Funktion $f$ für ganz $\mathbb{R}$ definiert ist, beschreiben Sie die Ableitbarkeit der Funktion im Punkt mit Abszisse Null und geben Sie einen möglichen Graphen der Funktion in einer Umgebung von Null an.




### 2019 Simulation Dezember 2018 Frage 2

Bestimmen Sie den Wert für $k$ so, dass die Tangente im Ursprung an den Graphen der Funktion

$$f(x) = \frac{x}{x-k}$$

mit der $x$-Achse einen Winkel von $\frac{\pi}{6}$ Radiant bildet.

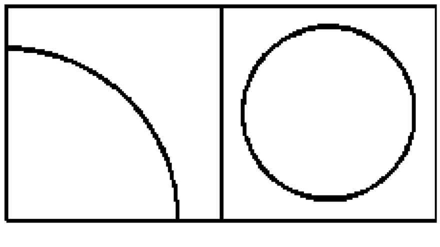
### 2019 Simulation Dezember 2018 Frage 3

Lösen Sie ausschließlich auf graphischen Wege die Ungleichung:

$$|x-2| > |x-6|$$

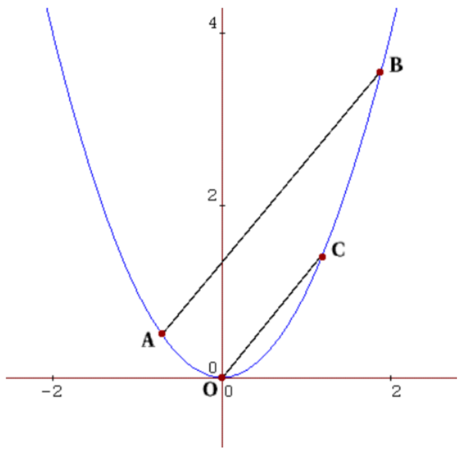
### 2019 Simulation Dezember 2018 Frage 4

Der Kreis mit Radius $R$ hat den Mittelpunkt links unten und überdeckt genau die Hälfte der Fläche des Quadrates; der Kreis mit Radius $r$ mit Mittelpunkt in der Mitte des Quadrates bedeckt die Hälfte der Fläche. Bestimmen Sie das Verhältnis $R/r$, wenn man weiß, dass die beiden Quadrate äquivalent sind.



### 2019 Simulation Dezember 2018 Frage 5

Gegben sind zwei Punkte $A(a|a^2)$ und $B(b|b^2)$ auf der Parabel $y = x^2$. Betrachten Sie die Gerade $OC$, welche parallel zur Geraden durch $AB$ und durch den Ursprung und den Punkt $C(c|c^2)$ verläuft.




Zeigen Sie, dass $a + b = c$ ist.

Betrachten Sie nun einen weitere Parallele $DE$, welche durch die Parabelpunkte $D$ und $E$ verläuft. Zeigen Sie, dass die Mittelpunkte der 3 Parallelen auf einer Geraden liegen.

### 2019 Simulation Dezember 2018 Frage 6

Der Graph einer kubischen Polynomfunktion $y = f(x)$ schneidet die $x$-Achse in den Punkten mit Abszissen 10, 100 und 1000. Reicht diese Information um die Koordinaten des Wendepunktes zu bestimmen? Wenn ja, dann bestimmen Sie diesen. Wenn nicht, dann begründen Sie dies.

### 2019 Simulation Dezember 2018 Frage 7

Eine Kugel mit Zentrum im Punkt $K(1|0|1)$ berührt die Ebene $\Pi$ mit der Gleichung $x - 2y + z + 1 = 0$. Wie lautet der Berührungspunkt? Wie groß ist der Radius der Kugel?

### 2019 Simulation Dezember 2018 Frage 8

Wenn man eine Münze zwei Mal wirft, so ist die Wahrscheinlich genau einmal Kopf und einmal Zahl (in beliebiger Reihenfolge) zu erhalten genau 50%. Wenn nun die Münze 4 mal geworfen wird, ist dann die Wahrscheinlichkeit 2 mal Zahl und 2 mal Kopf (in beliebiger Reihenfolge) zu erhalten wieder 50%? Begründen Sie Ihre Antwort.