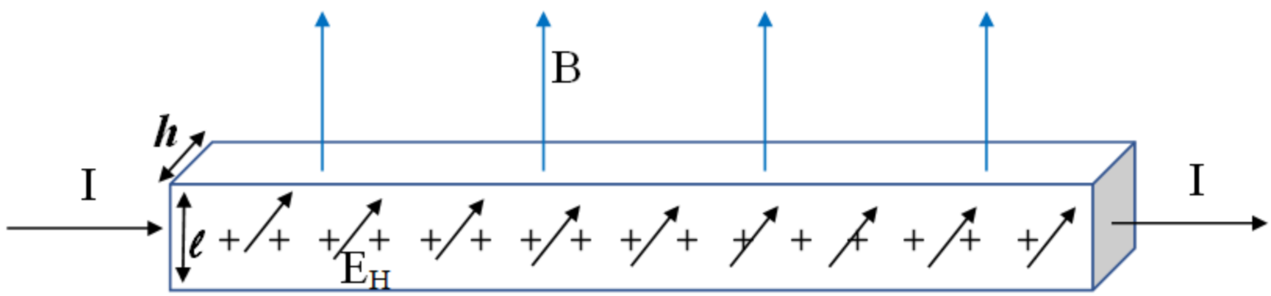
Lösung Problemstellung 1:



1. Der Halleffekt kann durch die Ablenkung von bewegten Ladungen interpretiert werden. Dabei werden die Elektronen von ihrer geraden Bahn im Leiter durch die Lorentzkraft $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ senkrecht zu $\vec{B}$ und $\vec{v}$ abgelenkt. Somit entsteht an der einen Seite des Plättchens ein Elektronenmangel, während auf der gegenüberliegenden Seite in der Abbildung eine höhere Elektronendichte aufweist. Zwischen diesen zwei Platten ensteht also ein in guter Näherung homogenes elektrisches Feld E_H (vergleichbar mit dem Feld eines Plattenkondensators) und dazu gehörig eine Spannung $U_H = E_H \cdot h$. Dieser Vorgang geht solange weiter, bis die Lorentzkraft die Abstoßung der gleichnamigen Ladungen überwinden kann, also bis zum Gleichgewichtszustand $\vec{F}_{ges} = q\vec{v} \times \vec{B} + q\vec{E} = 0$, bzw. $|\vec{F}_{el}| = |\vec{F}_L|$.

2. Nehmen wir an, dass es sich bei den bewegten Ladungen in der Abbildungen um Elektronen handelt. Somit ist der negative Pol der Batterie an der linken Seite und der positive an der rechten Seite des Plättchens angeschlossen. Würden nun die bewegten Ladungen positiv sein, so würden sich bei gleicher angelegter Spannungspolung die Ladungen in die Gegenrichtung bewegen, daher wäre die vordere Fläche des Plättchens negativ und das hintere positiv geladen und die Polung der Spannung würde wechseln.

3. Um zu zeigen, dass U_H und B direkt proportional sind, muss es eine Gleichung geben, bei der $U_H = k \cdot B$, wobei k die Proportionalitätskonstante ist; also der Gleichung einer Ursprungsgerade entspricht. Wird die Gleichgewichtsbedingung $|\vec{F}_{el}| = |\vec{F}_L|$ erreicht, so gilt für die Beträge

$$\begin{aligned} q \cdot E &= q \cdot v \cdot B \quad \Big| \cdot \frac{h}{q} \\ E \cdot h &= v \cdot h \cdot B \\ U_H &= \underbrace{v_D \cdot h}_{k} \cdot B \end{aligned}$$

wobei h die Dicke des Plättchens darstellt (siehe Abbildung der Aufgabenstellung). Da v_D die Driftgeschwindigkeit der Ladungen darstellt und h die Dicke des Plättchens, kann man sehen, dass U_H und B direkt proportional sind und die Proportionalitätskonstanten $k = v_D \cdot h$.

4. Zeichnet man die Messwerte in ein Diagramm, so ergibt sich der folgende Verlauf

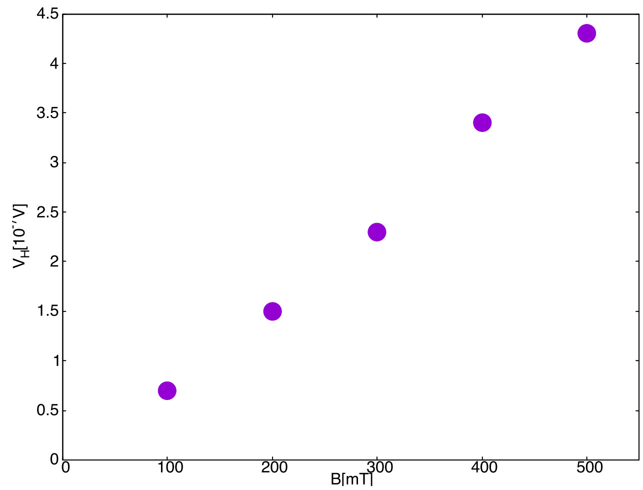


Abbildung 1: Eichung: U_H in Funktion von B

Man kann beobachten, dass der Verlauf dem einer Geraden entspricht.

Aus den Messwerten kann man die Regressionsgerade durch den Ursprung wie folgt berechnen (mit $x \leftrightarrow B$ und $y \leftrightarrow U_H$):

$$k = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^{N} x_i^2} = 8.35 \cdot 10^{-7} V/T$$

Und der Fehler δm der Steigung berechnen aus:

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} [y_i - m \cdot x_i]} = 0.145 \cdot 10^{-7} V$$

einzusetzen in

$$\delta k = \sigma_y \cdot \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=0}^{N} x_i^2}} = 0.20 \cdot 10^{-7} V/T$$

Als Einschätzung der Güte der Messwerte bzw. der Eichungskurve kann der relative Fehler $\delta k/k$ hergenommen werden, der hier 2.3% beträgt. Alternativ kann für die Güte auch das Bestimmtheitsmaß hergenommen werden :

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{N} (y_i - kx_i)^2}{\sum_{i=0}^{N} y_i^2} = 99.1\%$$

was einem idealen Wert von 100% sehr nahe kommt.

Zweiter Lösungsvorschlag zu Teilaufgabe 4:

Aus den Messwerten kann man eine Regressionsgerade (die hier nicht durch den Ursprung geht) wie folgt berechnen, mit $y \leftrightarrow \Delta V_H$ und $x \leftrightarrow B$:

$$k = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2} = 9.1 \cdot 10^{-7} V/T$$

$$H_{H,0} = \bar{y} - k\bar{x} = -0.29 \cdot 10^{-7} V$$

wobei k die Steigung der Geraden darstellt und $U_{H,0}$ den $y-$Abschnitt.

Um die Güte dieser Regression zu bestimmen, kann man mit $\hat{y}_i = k \cdot x_i + U_{H,0}$ das Bestimmtheitsmaß

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{N}(y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^{N}(y_i - \bar{y}))} = 99.6\%$$

oder den Standardfehler

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-2}\sum_{i=1}^{N}(y_i - \hat{y}_i)^2} = 0.1 \cdot 10^{-7} V$$

bestimmen, wobei für ein gutes Modell R^2 nahe an 100% sein sollte und der Standardfehler (zu jedem Messwert) möglichst klein bezüglich den Einzelmesswerten. Wie man sieht, sind dieser Vorgaben in gutem Maß gegeben.

Dritter Lösungsvorschlag zu Teilaufgabe 4:

Um die mittlere Steigung zu bestimmen, kann man sonst für einen Schätzwert auch wie folgt vorgehen:

	B[mT]	$U_H[10^{-7}V]$	$U_H/B[10^{-7}V/T]$
	100	0.7	7.0
	200	1.6	8.0
	300	2.3	7.7
	400	3.4	8.5
	500	4.3	8.6
Mittelwert			8.0
Standardabw. σ_n			0.7

Tabelle 1:

Wobei der Fehler auf $m = 8.0 \cdot 10^{-7} V/T$ mittels der Standardabweichung abgeschätzt werden kann:

$$\delta k = \frac{1}{\sqrt{N}}\sigma_n = 0.3 \cdot 10^{-7} V/T$$

also einem relativen Fehler von ungefähr

$$\frac{\delta k}{k} = 4\%$$

entspricht.

---

5. Für eine Proportionalitätskonstante von $k = 9.1 \cdot 10^{-7} V/T$ und $h = 0.1cm = 10^{-3}m$ ergibt sich aus $k = v_D \cdot h$ eine Driftgeschwindigkeit von

$$v_D = \frac{k}{h} = \frac{9.1 \cdot 10^{-7} V/T}{1 \cdot 10^{-3} m} = 9.1 \cdot 10^{-4} m/s$$

Aus dem Zusammenhang für eine konstante Stromstärke und mit $t = x/v_D$ erhält man:

$$I = \frac{q}{t} = \frac{q \cdot v_D}{x} \underbrace{=}_{q = n \cdot e \cdot V} \frac{neV}{x} \cdot v_D = n \cdot e \cdot A \cdot v_D$$

mit der Querschnitsfläche $A = h \cdot l$ und der Ladungsträgerdichte $n = \frac{\text{Anzahl der Ladungsträger}}{\text{Volumen}}$.
Somit ergibt sich für die Ladungsträgerdichte

$$n = \frac{I}{eAv_D} = \frac{1A}{1.602 \cdot 10^{-19} C \cdot 2 \cdot 10^{-5} m^2 \cdot 9.1 \cdot 10^{-4} m/s} = 3.43 \cdot 10^{26} \frac{1}{m^3}$$

Lösung Problemstellung 2:

1. Die Abbildungen können wie folgt vervollständigt werden:

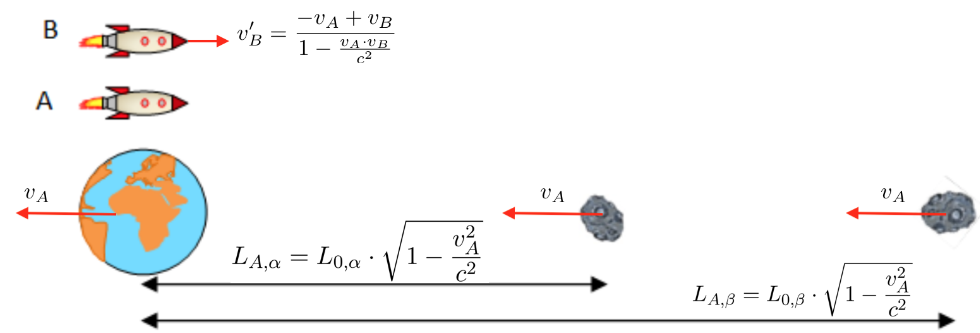


Abbildung 2: Ausgangslage im Bezugssystem A

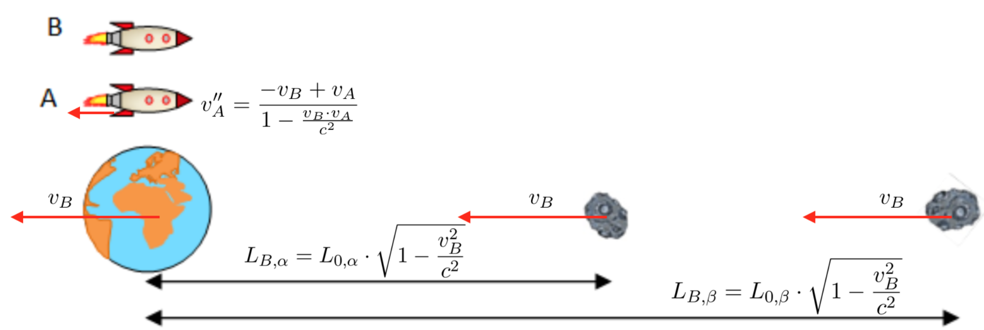


Abbildung 3: Ausgangslage im Bezugssystem B

Wobei die Geschwindigkeiten v_A und v_B die Geschwindigkeiten im Bezugssystem der Erde darstellen, während v''_A die Geschwindigkeit von v_A im Bezugssystem B angibt, während v'_B die Geschwindigkeit von v_B im Bezugssystem A darstellt.

2. Im Bezugssystem A vergeht eine Eigenzeit von $t'_\alpha = 3.299 \cdot 10^4 s$. Es gilt daher, dass für einen Beobachter auf der Erde für das Erreichen des Asteroiden α die Zeit $t_A = t'_\alpha \cdot \gamma_A$ vergeht (mit $\gamma_A = \frac{1}{\sqrt{1-v_A^2/c^2}}$.

   Da sich die Rakete im Bezugssystem der Erde mit $v_A = \frac{L_{0,\alpha}}{t_A} = \frac{L_{0,\alpha}}{\gamma_A \cdot t'_\alpha}$ bewegt, erhält man für die Geschwindigkeit :

$$v_A = \frac{L_{0,\alpha}}{t'_\alpha} \cdot \sqrt{1 - \frac{v_A^2}{c^2}}$$

$$\frac{t'^2_\alpha}{L^2_{0,\alpha}} v_A^2 + \frac{v_A^2}{c^2} = 1$$

und daraus ergibt sich:

$$v_A = \frac{L_{0,\alpha}}{\sqrt{t_\alpha'^2 \cdot c^2 + L_{0,\alpha}^2}} \cdot c = 0.4c$$

Ebenso erhält man die Gleichung zu Berechnung von v_B als:

$$v_B = \frac{L_{0,\beta}}{\sqrt{t_\beta'^2 \cdot c^2 + L_{0,\beta}^2}} \cdot c = 0.633c$$

Mit der relativistischen Addition von Geschwindigkeiten erhält man die Geschwindigkeit von A im Bezugssystem von B als:

$$v_A'' = \frac{-v_A + v_B}{1 - \frac{v_A \cdot v_B}{c^2}} = -0.312c$$

und für die Geschwindigkeit von B im Bezugssystem von A

$$v_B' = \frac{-v_B + v_A}{1 - \frac{v_A \cdot v_B}{c^2}} = 0.312c$$