

Lösung der Problemstellung 1

1. Beim Fallen des Magneten ändert sich bei den Spulen genau so wie im Kupferrohr das Magnetfeld und somit der magnetische Fluss. Nach dem Induktionsgesetz von Faraday ist mit einem sich zeitlich ändernden magnetischen Fluss eine Induktionsspannung verbunden. Diese Induktionsspannung erzeugt die Ströme in den Spulen.

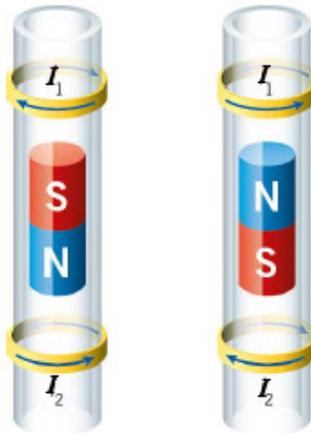
Die induzierten Ströme rufen ein Magnetfeld hervor, das fast vollständig im Rohr ist. Nach der Lenzschen Regel wirkt dieses induzierte Magnetfeld seiner Ursache, also der Fallbewegung des Magneten, entgegen. Daher ist die Kraft des erzeugten Magnetfeldes auf den fallenden Magneten entgegen der Fallrichtung, also nach oben gerichtet.

Bei größerer Fallgeschwindigkeit ändert sich der magnetische Fluss schneller, also ist die induzierte Spannung U laut Induktionsgesetz $|U| = \left| \frac{d\Phi}{dt} \right|$ größer und somit fließt auch ein größerer

Strom I , da das Ohmsche Gesetz gilt: $I = \frac{U}{R}$, wobei R der Ohmsche Widerstand der Spulen ist.

Ein höherer Spulenstrom sorgt aber für ein größeres Magnetfeld (für ein Solenoid= lange Spule gilt $B = \mu_0 \frac{NI}{\ell}$). Somit wird bei höheren Geschwindigkeiten ein größeres magnetisches Gegenfeld erzeugt, was zu einer größeren Bremskraft führt.

Wir untersuchen nun die Stromrichtung, und zwar zunächst für den Fall, dass der Magnet mit dem Nordpol voraus hinunterfällt (linke Zeichnung).



Befindet sich der Nordpol des Magneten über der Spule (das Magnetfeld des fallenden Magneten zeigt also in der Spule nach unten), dann ist der Strom in der Spule so gerichtet, dass er ein Magnetfeld erzeugt, das dem stärker werdenden Magnetfeld entgegenwirkt, also muss es nach oben zeigen. Betrachten wir das Rohr von oben, so fließt der Strom I_2 gegen den Uhrzeigersinn. Aufgrund der Rechten-Hand-Regel zeigt dann das induzierte Magnetfeld wie gewünscht nach oben.

Ist der Südpol unterhalb der Spule, dann ist der Strom in der Spule so gerichtet, dass er ein Magnetfeld erzeugt, das dem schwächer werdenden Magnetfeld entgegenwirkt, also zeigt das induzierte Magnetfeld in die gleiche Richtung wie dasjenige des fallenden Magneten, also nach unten. Somit fließt der Strom I_1 im Uhrzeigersinn, wenn wir das Rohr von oben betrachten.

In der Abbildung rechts wird der fallende Magnet umgedreht. Die Ströme fließen daher im Ver-

gleich zum ersten Fall in die entgegengesetzte Richtung. Die Überlegung erfolgt wiederum über die Lenzsche Regel und die Rechte-Hand-Regel.

2. Für die mittlere Fallgeschwindigkeit gilt: $\bar{v} = \frac{h}{\Delta t}$.

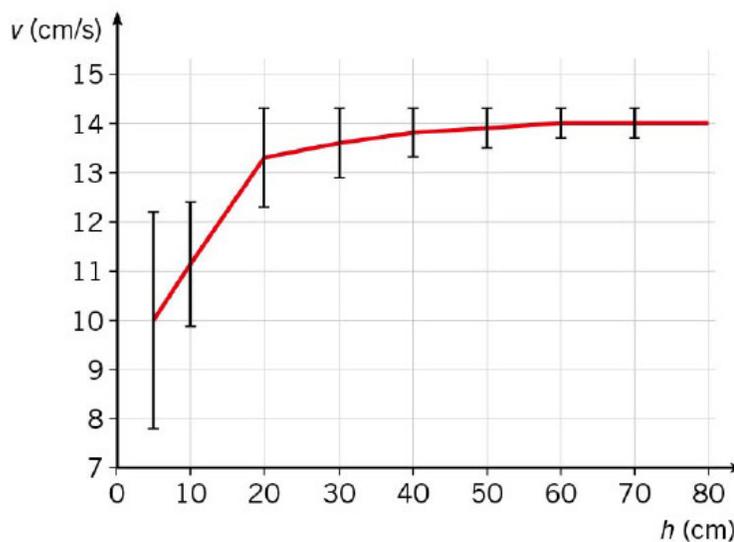
Der relative Fehler der Geschwindigkeit ergibt sich durch die Fehlerfortpflanzung:

$$\frac{\delta v}{v} = \frac{\delta h}{h} + \frac{\delta t}{\Delta t}$$

Der Fehler für v ist

$$\delta v = v \cdot \left[\frac{\delta h}{h} + \frac{\delta t}{\Delta t} \right]$$

h/cm	$\Delta t/\text{s}$	$v/(\text{cm/s})$	$\delta v/(\text{cm/s})$
5,0	0,5	10,0	2,2
10,0	0,9	11,1	1,3
20,0	1,5	13,3	1,0
30,0	2,2	13,6	0,7
40,0	2,9	13,8	0,5
50,0	3,6	13,9	0,4
60,0	4,3	14,0	0,3
70,0	5,0	14,0	0,3
80,0	5,7	14,0	0,3



Ab einer Fallhöhe von 60 cm ändert sich die Fallgeschwindigkeit nicht mehr. Es ergibt sich eine Grenzgeschwindigkeit von 14 cm/s mit einer Messunsicherheit von 0,3 cm/s.

Für die wirkenden Kräfte gilt: $F_{res} = ma = mg - kv$, da die Bremskraft der Gewichtskraft entgegenwirkt.

Zunächst ist die Geschwindigkeit 0 und die Beschleunigung daher $a = g$. Dadurch erhöht sich die

Geschwindigkeit, da $\frac{dv}{dt} = a$. Daher sinkt die Gesamtkraft und die Beschleunigung (k ist positiv!). Bei einer kleineren Beschleunigung wächst die Geschwindigkeit langsamer. Dadurch nimmt die Beschleunigung ab, aber nicht mehr so stark. Falls die Gewichtskraft gleich der Bremskraft ist, so ist die Beschleunigung 0 und somit auch die Änderung der Geschwindigkeit. Daher bleibt die Geschwindigkeit konstant. Theoretisch tritt dies erst nach unendlich langer Zeit ein. Dann gilt: $mg - kv_{Grenz} = 0 \Rightarrow k = \frac{mg}{v_{Grenz}} \approx 0,165 \text{ kg/s}$.

3. Während der Beschleunigungsphase wird ein Teil der potentiellen Energie in kinetische Energie, magnetische Feldenergie und Joulesche Wärme umgewandelt. Erreicht der Magnet die Grenzgeschwindigkeit, so ändert sich seine kinetische Energie nicht mehr. Ebenso unverändert bleibt die magnetische Feldenergie. Potentielle Energie wird in Joulesche Wärme umgewandelt. Nach einem Fall von 80 cm ist die umgewandelte mechanische Energie gleich

$$\Delta E_{mech} = mgh - \frac{1}{2}mv_{Grenz}^2 = 1,84 \cdot 10^{-2} \text{ J}$$

Dieser Teil der Energie wurde in magnetische Feldenergie und Joulesche Wärme umgewandelt.

4. Wir nehmen an, dass die gesamte umgewandelte mechanische Energie in Joulesche Wärme übergeht: $|\Delta E_{mech}| = |E_{el}|$

Die elektrische Leistung ist $P = \frac{E_{el}}{\Delta t} = 2 \cdot RI^2$, da zwei Spulen mit jeweils Widerstand R vom gleich großen Strom I durchflossen werden. Die Änderung der mechanischen Energie beträgt $\Delta E_{mech} = mg\Delta h$, da sich die kinetische Energie nicht mehr ändert.

Da $\frac{\Delta h}{\Delta t} = v_{Grenz}$ ist, gilt $\frac{\Delta E_{mech}}{\Delta t} = mgv_{Grenz} = P \Rightarrow I = \sqrt{\frac{mgv_{Grenz}}{2R}} = 1,3 \text{ A}$

Die Änderung des magnetischen Flusses pro Zeiteinheit ist laut Induktionsgesetz gleich der Spannung, die wiederum gleich $R \cdot I$ ist.

Somit ist der Betrag der Änderung des magnetischen Flusses pro Zeiteinheit gleich $1,3 \cdot 10^{-3} \text{ V}$. Aluminium hat einen höheren spezifischen Widerstand. Daher ist der Strom bei gleicher Magnetgeschwindigkeit kleiner und demzufolge ist die Bremskraft kleiner. Bei der Grenzgeschwindigkeit ist die Gewichtskraft gleich der Bremskraft, die proportional zur Stromstärke ist. Somit müssen bei Aluminium und Kupfer die gleichen Stromstärken erreicht werden. Wir haben bereits gezeigt, dass $P_{el} = mgv_{Grenz}$. Bei gleichem Strom ist die elektrische Leistung proportional zu R (weil $P = RI^2$ gilt). Somit ist v_{Grenz} proportional zu R . Aluminium hat den größeren Widerstand und daher die größere Grenzgeschwindigkeit.

Lösung der Problemstellung 2

- Ein Emissionsspektrum entsteht sowohl im Bohrschen Atommodell als auch in der komplett quantenmechanischen Beschreibung durch Übergänge der Elektronen von einem höheren Energieniveau in ein tieferes. Beide Modelle sagen diskrete Energieniveaus vorher, der wesentliche Unterschied ist, dass im Bohrschen Atommodell auch noch scharf begrenzte Elektronenbahn angenommen werden. Die Energieniveaus werden durch ganzzahlige Quantenzahlen n beschrieben: E_n .

Die Energiedifferenz

$$E_n - E_m = h \cdot f$$

wird in Form eines Photons abgegeben, siehe Abbildung 1. Diese Relation kann man mit $f = \frac{c}{\lambda}$ und $E_n \sim \frac{1}{n^2}$ auch umschreiben:

$$\frac{1}{\lambda} \sim \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right)$$

Daher können die Wellenlängen ebenfalls nur diskrete Werte annehmen. Aus den Wellenlängen der Linien kann man also durch eine Ausgleichsrechnung auf die beteiligten Quantenzahlen schließen. Danach kann man auch die Proportionalitätskonstante bestimmen, welche in diesem Fall die Rydbergkonstante für das Wasserstoffatom ist:

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \cdot \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) ,$$

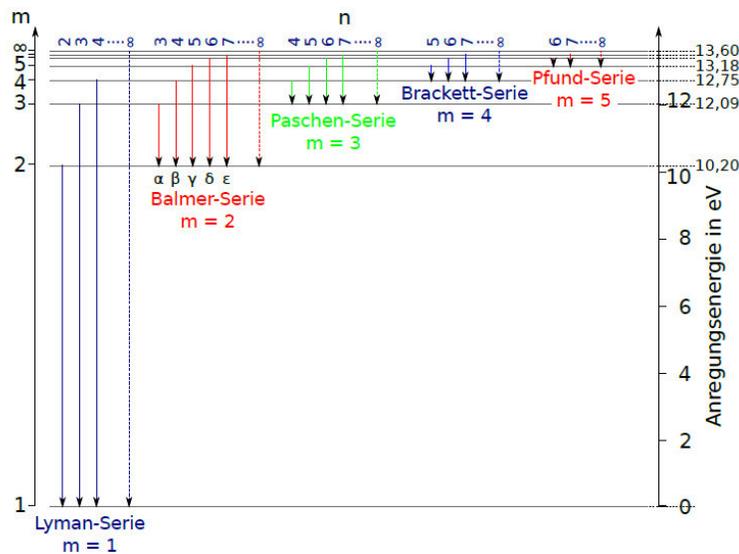


Abbildung 1: Das Wasserstoff-Termschema (aus[1])

Es gibt keine Wellenlängen anderer Serien, die zwischen der Anfangs- und Endwellenlänge einer bestimmten Serie enthalten ist. Daher können die Pickering-Linien nicht vom Wasserstoff stammen, da eine Linie im Bereich der Balmer-Serie liegt (siehe Tabelle 1)

- Durch Umstellen der Gleichung erhalten wir:

$$R_H = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}}$$

Dies liefert folgende Tabellenwerte

n	$\lambda[nm]$	$R_H[nm^{-1}]$
3	656,3	0,010971
4	486,1	0,010972
5	434,1	0,01097
6	410,2	0,01097
7	397,0	0,010971

Tabelle zur Berechnung der Rydbergkonstante

Durch Mittelwertbildung erhält man

$$R_H = 0,010971 \frac{1}{nm} = 1,0971 \cdot 10^7 m^{-1}$$

was eine sehr gute Übereinstimmung mit dem Literaturwert ($R_H = 10973731,568508m^{-1}$) ergibt.

Für die graphische Lösung dieser Aufgabe muss man ein Diagramm zeichnen, auf dessen x-Achse der Wert $\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2}$ aufgetragen wird, auf der y-Achse der Kehrwert der Wellenlänge. Dies kann in den z.B. in den Casio-Taschenrechner eingetippt werden (in einer Liste im Menüpunkt Statistik). Damit die beste Gerade durch den Ursprung geht, können wir die Punkte am Ursprung spiegeln (also das Vorzeichen der x- und y-Werte ändern).

Die Steigung der Regressionsgeraden ist $0,010971/nm$

Zur Berechnung der Quantenzahlen wird die Formel nach n umgeformt:

$$n = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\lambda \cdot R_H} \right)^{-1/2}$$

Damit erstellt man folgende Tabelle

$\lambda[nm]$	n
455,1	$4,485 \approx 4,5$
541,1	$3,502 \approx 3,5$
1012,3	$2,500 \approx 2,5$

Tabelle zur Berechnung der Quantenzahlen für die Pickering-Linien

Hieraus ist ersichtlich, dass die Quantenzahlen für die Pickering-Linien- wie behauptet- halbzahlig sind.

3. Mit der gegebenen Formel und für $n_1 = 4$ und $R'_H = 4 \cdot R_H$ kann man folgende Tabelle erstellen

(mittels $n_2 = \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{\lambda \cdot 4 \cdot R_H} \right)^{-1/2}$):

$\lambda_{\text{Pickering}}[nm]$	n_2
455,1	$8,970 \approx 9$
541,1	$7,004 \approx 7$
1012,3	$5,001 \approx 5$

$\lambda_{\text{Wasserstoff}} [nm]$	n_2
656,3	5,999 \approx 6
486,1	8,001 \approx 8
434,1	9,997 \approx 10
410,2	11,998 \approx 12
397,0	14,004 \approx 14

Tabelle mit Berechnung der Quantenzahlen für die Pickering-Linien und die Wasserstofflinien mit der modifizierten Rydbergkonstanten

Hieraus ist ersichtlich, dass alle beobachteten Linien von einem Ion stammen könnten; die Pickering-Linien füllen genau die Lücken der "Wasserstoff"-Linien aus. Mit beiden Tabellen hat man (fast) alle Übergänge, die im Energieniveau $n_1 = 4$ "landen" bis zu $n_2 = 14$.

4. An dieser Stelle soll nicht die Herleitung der Energieniveaus von wasserstoffähnlichen Ionen mit dem Bohrschen Atommodell erfolgen, sondern nur die notwendigen Änderungen in den Ansätzen, die zu diesen führen. Ausgangspunkt des Bohrschen Atommodells ist, dass die Coulombkraft zwischen Proton und Elektron im Wasserstoffatom als Zentripetalkraft wirkt (hierbei stammt das e^2 von $q_{\text{Proton}} \cdot q_{\text{Elektron}}$):

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r}.$$

Das Bohrsche Postulat der Drehimpulsquantisierung $L = mvr = n \frac{h}{2\pi}$ (oder äquivalent: Ausbildung einer stehenden Welle mit der de-Broglie-Wellenlänge des Elektrons) führt dann auf diskrete Radien und Energien. Von diesen beiden Gleichungen muss für wasserstoffähnliche Ionen nur das Kräftegleichgewicht modifiziert werden (da $q_{\text{Elektron}} = e$ und $q_{\text{Kern}} = Z \cdot e$):

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z \cdot e^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r}.$$

Alle folgenden Berechnungen ändern sich nur durch die Ersetzung $e^2 \rightarrow Z \cdot e^2$ bzw. $e \rightarrow \sqrt{Z} \cdot e$. Betrachtet man nun den gegebenen Ausdruck für die Rydbergkonstante

$$R_H = \frac{m_e e^4}{8h^3 \epsilon_0^2 c}$$

und führt obige Ersetzung durch, so erhält man

$$R'_H = \frac{m_e Z^2 e^4}{8h^3 \epsilon_0^2 c}$$

und schließlich (mit $R'_H = 4R_H$)

$$Z = 2.$$

Das beobachtete Spektrum wird also von einem wasserstoffähnlichen Ion mit $Z = 2$ erzeugt, es handelt sich also um ein He^+ -Ion.

Literatur

[1] <https://de.wikipedia.org/wiki/Balmer-Serie>

Von PNG: w:de:user:Kiko2000; SVG: Cepheiden - SVG-conversion:

Eigenes Werk (own work), CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=6501211>

Fragen

Lösung der Frage 1

Die Energiedichte in einem Magnetfeld ist gleich $w_M = \frac{1}{2\mu_0} B^2$. $w_M = \frac{E}{V}$, wobei E die gespeicherte Energie ist und V das Volumen der langen idealen Magnetspule (innen ist das Feld homogen, also überall gleich, außen ist es 0).

Umformen ergibt die gewünschte Formel $B = \sqrt{\frac{2\mu_0 E}{V}}$.

Das Magnetfeld einer langen, dünnen Spule (Solenoid), die von einem Strom I durchflossen wird, ist $B = \frac{\mu_0 N I}{\ell}$.

Umgestellt auf den Strom I liefert folgende Formel: $I = \frac{\ell}{N} \sqrt{2 \frac{E}{\mu_0 V}} = 1,1 A$

Lösung der Frage 2

Laut dem Induktionsgesetz von Faraday wird bei einer Änderung des magnetischen Flusses $\Phi = \vec{B}_2 \cdot \vec{A}_1$ in der Spule 1 eine Spannung induziert. Das Magnetfeld B_2 wird von der Spule 2 erzeugt, die Spule 1 hat die Fläche A_1 . In der Spule 2 ändert sich der Strom, also ändert sich auch das erzeugte Magnetfeld, es gilt nämlich $B = \frac{\mu_0 N I}{\ell}$. Der Strom ändert sich linear, daher ist die Ableitung des Stromes nach der Zeit konstant, somit auch die Ableitung der magnetischen Flussdichte B und ebenso die Ableitung des magnetischen Flusses. Somit ist die induzierte Spannung konstant, da $U_{ind} = -N \dot{\Phi}$.

Mit den angegebenen Werten erhält man $|U_{ind}| = 3,1 \cdot 10^{-4} V$. Dabei ist die Fläche der zweiten Spule nicht notwendig!

Lösung der Frage 3

- a) Die Energie in einem Meter des Laserstrahles ist gleich der Leistung multipliziert mit der Zeit, die das Licht für 1 Meter benötigt:

$$E = P \cdot t = P \cdot \frac{1m}{c} = 3,3 \cdot 10^{-9} J.$$

Dabei ist c die Lichtgeschwindigkeit.

- b) Zunächst bestimmen wir die Intensität $I = \frac{P}{A} = 5,0 \cdot 10^5 W/m^2$

$$\text{Es gilt: } I = \frac{1}{2} c \varepsilon_0 E_{max}^2 = \frac{1}{2\mu_0} c_0 B_{max}^2$$

$$\text{Daher gilt: } E_{max} = \sqrt{\frac{2I}{c\varepsilon_0}} = 1,9 \cdot 10^4 \frac{V}{m}$$

$$B_{max} = \sqrt{\frac{2\mu_0 I}{c}} = 6,5 \cdot 10^{-5} T$$

- c) Die ausgesandte Energie pro Sekunde beträgt 1J.

Ein Photon hat nach der Einstein-Formel die Energie $E = h \cdot f = h \cdot \frac{c}{\lambda}$.

Aus $N \cdot h \cdot \frac{c}{\lambda} = E$ erhält man die Photonenzahl $N \approx 2,6 \cdot 10^{18}$

Lösung der Frage 4

- a) Die Austrittsarbeit ist $W_A = 5,15 \text{ eV} = 5,15 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$.

Ein Photon hat laut der Einstein-Formel die Energie $E = h \cdot f = h \cdot \frac{c}{\lambda}$. Es muss eine größere Energie mitbringen als diese Austrittsarbeit, um ein Elektron auslösen zu können. Wir berechnen die maximale Wellenlänge des Lichtes, ab der kein Elektron mehr ausgelöst werden kann:

$$E = h \cdot \frac{c}{\lambda_{max}} = W_A \Rightarrow \lambda_{max} = \frac{hc}{W_A} = 2,41 \cdot 10^{-7} \text{ m, also } 241 \text{ nm, dies liegt im Ultraviolett.}$$

- b) Für den Strom gilt: $I = \frac{Q}{t}$, wobei Q die Ladung ist, die in der Zeit t fließt.

Wenn N die Zahl der Elektronen ist, so gilt; $|Q| = Ne$, da jedes Elektron die Elementarladung e trägt.

Man erhält die Gleichung $I \cdot t = \frac{75}{100} \cdot Ne \Rightarrow N \approx 1,2 \cdot 10^{14}$. Dies ist die gesuchte Elektronenzahl.

Lösung der Frage 5

Klarerweise ist die Relativgeschwindigkeit des zweiten Raumschiffes zum ersten Raumschiff nicht $1,65c$.

Sie wird über die Geschwindigkeitsaddition bestimmt: $u = \frac{v + v_2}{1 + \frac{v \cdot v_2}{c^2}} = \frac{0,9c + 0,75c}{1 + 0,9 \cdot 0,75} = 0,985c$

Das ruhende Bezugssystem und das zweite Raumschiff bewegen sich für den Beobachter im ersten Raumschiff in die gleiche Richtung, daher haben die beiden Geschwindigkeiten das gleiche Vorzeichen.

Insgesamt ergibt sich für den Beobachter im ersten Raumschiff eine Länge von $L_1 = L_2 \cdot \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = 5,94 \text{ m}$.

Lösung der Frage 6

Die Energie des Elektrons nach der Beschleunigung ist $E_{kin} = e \cdot U$

Außerdem gilt: $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$, da der Impuls $p = m \cdot v$ ist.

Daher gilt: $p = \sqrt{2meU}$

Die de-Broglie-Wellenlänge ist $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2meU}} = \sqrt{\frac{h^2}{2meU}} = \sqrt{\frac{1,504 \cdot 10^{-18} \text{ Vm}^2}{U}} = \sqrt{\frac{1,504 \text{ V}}{U}}$.

$$10^{-9} \text{ m} = \sqrt{\frac{1,504 \text{ V}}{U}} \text{ nm}$$

Bei einer Beschleunigungsspannung von $U = 50,0 \text{ V}$ erhalten wir eine Wellenlänge von $\lambda = 0,173 \text{ nm}$, also im Ångström-Bereich.