Matura 2019-4

0.1 2019 4. Session

0.1.1 2019 4. Session Problemstellung 1

Betrachten Sie folgende Funktion:

$$f(x) = \begin{cases} a - \dfrac{b}{(1-x)^2} & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ a + \dfrac{b}{(1-x)^2} & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

Dabei sind a und b zwei positive Konstanten.

1. Untersuchen Sie $f(x)$ in Abhängigkeit von a und b, indem Sie die Gleichungen der Asymptoten berechnen und bestimmen Sie, unter welchen Bedingungen x_0 mit $0 \leq x_0 < 1$ existiert, sodass $f(x_0) = 0$ ist!
   Bestimmen Sie a und b so, dass $x_0 = \dfrac{1}{2}$ ist und die Gerade mit der Gleichung $16x + y - 8 = 0$ Tangente an den Graphen von $f(x)$ im Punkt $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ ist!

2. Es wird $a = 4$ und $b = 1$ gesetzt. Bestimmen Sie den Bereich R, der vom Graphen von $f(x)$ und den Koordinatenachsen eingeschlossen wird!

Man betrachte eine ebene Fläche π, die unendlich ausgedehnt ist. Auf ihr befindet sich eine positive, homogen verteilte Ladung mit konstanter Flächenladungsdichte σ (angegeben in Coulomb pro Quadratmeter). In einer Entfernung von $d = 1\,\mathrm{m}$ von der Ebene π befindet sich eine positive Punktladung q (angegeben in Coulomb). Sei s die Halbgerade, die von der Ebene π startet, durch q verläuft und senkrecht zur Ebene steht. P ist ein beliebiger Punkt auf s in einer Distanz $x \geq 0$ von der Ebene.

3. Welche Richtung hat der elektrische Feldstärkevektor in P?
   Zeigen Sie, dass für eine geeignete Wahl der Werte der physikalischen Konstanten a und b die Funktion $f(x)$ die Stärke und das Vorzeichen des elektrischen Feldstärkevektors in P angibt!
   Führen Sie eine Dimensionsanalyse für die Konstanten a und b durch!

4. Zeigen Sie, dass es auf der Halbgeraden s einen Punkt gibt, bei dem das elektrische Feld null ist!
   Überprüfen Sie, ob sich eine ruhende Ladung (abhängig von ihrem Vorzeichen) in diesem Punkt in einem stabilen oder labilen Gleichgewicht befindet!

0.1.2 2019 4. Session Problemstellung 2

Eine ebene elektromagnetische Welle breitet sich im Vakuum aus. Sie ist linear polarisiert. Das elektrische Feld der Welle ändert sich nach folgendem Gesetz:

$$\vec{E}(x,t) = E_0 \sin(kx - \omega t)\,\hat{y}$$

Dabei ist $\hat{y}$ der Einheitsvektor in y-Richtung.

1. Beschreiben Sie qualitativ den Mechanismus der Erzeugung und der Ausbreitung einer elektromagnetischen Welle und erklären Sie die Bedeutung von E_0, k und ω.

2. Die Amplitude der Schwingung beträgt $2{,}0\,\mathrm{V/m}$, die Schwingungsfrequenz $5{,}0 \cdot 10^5\,\mathrm{Hz}$.
   Geben Sie den Ausdruck für das elektrische und das magnetische Feld der Welle an.
   In welche Richtung schwingt $\vec{B}$?
   In welche Richtung breitet sich die Welle aus? Begründen Sie Ihre Antworten!

Man betrachte die Funktion $f(x) = A\sin(kx - \omega t)$, wobei A und k positive Konstanten sind. $\omega = 10^6\pi, t = 5 \cdot 10^{-7}$.

3. Welche Periode hat die Funktion $f(x)$?
   Bestimmen Sie den Wertebereich der Funktion!
   Geben Sie die Abszissen der Hochpunkte, Tiefpunkte und Wendepunkte an!
   Berechnen Sie, für welche Werte von A und k der Wertebereich der Funktion $f(x)$ gleich $[-2; 2]$ ist und die Funktion die Periode $\dfrac{\pi}{2}$ hat!

4. Man setze $A = 2$ und $k = 4$. Bestimmen Sie die Fläche jenes Bereiches, der vom Graphen der Funktion $g(x) = [f(x)]^2$ und der Abszisse in einer Periode eingeschlossen wird!
   Welche Bedeutung haben die Wendepunkte der Funktion $f(x)$ für den Graphen der Funktion $g(x)$?

0.1.3 2019 4. Session Frage 1

Bestimmen Sie alle möglichen Werte von a, b und c, so dass

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{ax^b + 8x^4 + cx^3 + 7}{13x^2 + 3x^3 - 5} = 3$$

Begründen Sie Ihre Antwort!

0.1.4 2019 4. Session Frage 2

Bestimmen Sie die Abszissen der Punkte, bei denen lokale Maxima und Minima der Funktion vorliegen!

$$f(x) = \int_4^x (3^{5t-2t^2} - 1)\mathrm{d}t$$

0.1.5 2019 4. Session Frage 3

Gegeben ist ein Dreieck ABC, dessen stumpfer Winkel bei A liegt. B' und C' sind die entsprechenden Höhenfußpunkte der Ecken B und C.
Zeigen Sie, dass das Viereck $BB'C'C$ einem Kreis eingeschrieben werden kann und dass die Dreiecke ABC und $AB'C'$ ähnlich sind!

0.1.6 2019 4. Session Frage 4

Im Raum sind folgende Punkte gegeben: $A(1; 0; -1)$ und $B(-3; -2; 0)$. g sei die Gerade, die durch A und B geht. Bestimmen Sie die Gleichung der Ebene π, die durch den Punkt $P(-1; 3; 4)$ geht und senkrecht zu g ist!
Bestimmen Sie außerdem die Koordinaten des Punktes Q, der bei der Spiegelung von P an der Geraden g entsteht!

0.1.7 2019 4. Session Frage 5

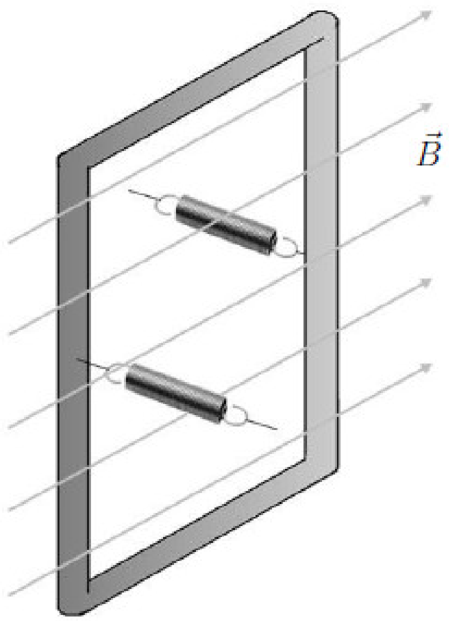
Eine Schachtel enthält 3 gelbe und 4 blaue Kugeln. Eine zweite Schachtel enthält 2 blaue und 4 gelbe Kugeln.
Jemand entnimmt zufällig 2 Kugeln aus der ersten Schachtel und gibt sie in die zweite. Ein anderer entnimmt danach zufällig 2 Kugeln aus der zweiten Schachtel und gibt sie in die erste. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass am Ende in jeder der beiden Schachteln die Anzahl der gelben und der blauen Kugeln gleich ist wie am Anfang?

0.1.8 2019 4. Session Frage 6

Ein $\alpha-$Teilchen (zwei Protonen und zwei Neutronen) gelangt durch eine Öffnung bei der negativ geladenen Seite in einen Plattenkondensator. Die Geschwindigkeit ist senkrecht zu den Platten, ihr Betrag hat den Wert $v_0 = 6{,}93 \cdot 10^4\,\mathrm{m/s}$.
Der Abstand der Platten beträgt 10,0 cm, an ihnen liegt eine Spannung von 200 V.
Welchen Weg legt das Teilchen innerhalb des Kondensators zurück, bevor es wieder umkehrt?
Sie können die Neutronenmasse gleich der Protonenmasse setzen.

0.1.9 2019 4. Session Frage 7

Eine quadratische Leiterschleife mit Kantenlänge $\ell = 20\,\mathrm{cm}$ wird von einem Strom $I = 0{,}50\,\mathrm{A}$ durchflossen. Sie befindet sich in einem homogenen Magnetfeld der Stärke $B = 0{,}10\,\mathrm{T}$, dessen Richtung parallel zur Ebene der Leiterschleife ist.
Die Leiterschleife wird durch ein Feder-Paar im Gleichgewicht gehalten (siehe Skizze). Die Federkonstante beträgt $D = 2\,\mathrm{N/m}$. Bestimmen Sie die Längenänderung der Federn aus der Ruhelage und die Richtung des Stromes!



0.1.10 2019 4. Session Frage 8

In einem vorgegebenen Bezugssystem ist das elektrische Potential durch folgende Gleichung gegeben: $\varphi(x) = Ax^2e^{-Bx}$, wobei A und B positive physikalische Konstanten sind. Geben Sie ihre physikalischen Einheiten an!
Bestimmen Sie den Ort, an dem der Betrag des elektrostatischen Feldes ein Maximum erreicht! Wie groß ist dieser Maximalwert?

Protonenmasse	m_p	$1{,}673 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$
Elektrische Feldkonstante	ε_0	$8{,}854 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F\ m^{-1}}$