



UNIONE MATEMATICA ITALIANA
 PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA

MINISTERO DELL'ISTRUZIONE,
 DELL'UNIVERSITÀ E DELLA RICERCA

I Giochi di Archimede - Gara Triennio

21. November 2019



- Die Arbeit besteht aus 20 Aufgaben. Für jede Frage stehen fünf Antworten zur Auswahl; sie sind mit den Buchstaben (A), (B), (C), (D) und (E) gekennzeichnet. Genau eine dieser Antworten ist richtig.
- Jede richtige Antwort zählt 5 Punkte, jede falsche 0 Punkte, jede Frage mit einer unleserlichen Antwort bzw. jede Frage ohne Antwort 1 Punkt.
- Für jede Aufgabe musst du **IN BLOCKSCHRIFT** den Buchstaben, der deiner Meinung nach zur richtigen Antwort gehört, in das untenstehende Raster eintragen. Lösungen oder Korrekturen sind nicht erlaubt.
- **SCHWÄRZE VOLLSTÄNDIG** deinen Geburtsmonat, dein Geschlecht und deine Klasse. Schreibe **IN BLOCKSCHRIFT**, mit größter Sorgfalt und Präzision alle weiteren geforderten Informationen zu deiner Person neben die Pfeile.

Die Benutzung eines Taschenrechners oder eines Kommunikationsmittels ist verboten.

Für die gesamte Arbeit stehen dir 110 min zur Verfügung. Gute Arbeit!

VORNAME →
NACHNAME →
GEBURTSJAHR →
GEBURTSMONAT
JÄN. FEB. MÄR. APR. MAI JUN.
JUL. AUG. SEPT. OKT. NOV. DEZ.
GEBURTSTAG →
GESCHLECHT W M
KLASSE 3 4 5
SEKTION →

ANTWORT-RASTER T1

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16
17	18	19	20

- 1) In einem Dreieck DEF sind die Höhen, die von den Eckpunkten D, E, F ausgehen 84, 80 bzw. 81 Meter lang (in dieser Reihenfolge). Die Längen der Seiten EF, FD und DE werden in dieser Reihenfolge mit d, e, f bezeichnet. Welche Ungleichung ist richtig?
- (A) $e < f < d$ (B) $d < f < e$ (C) $d < e < f$ (D) $f < e < d$ (E) $e < d < f$

- 2) Der Verkaufspreis einer Ware ergibt sich aus dem Grundpreis zuzüglich eines festen Prozentsatzes (IVA bzw. MwSt. genannt). In einem Geschäft kostet ein Pullover 61,00€, einschließlich der MwSt. von 22%. Wenn sich die MwSt. auf 25% erhöht, wäre der Verkaufspreis des Pullovers
- (A) 62,50 € (B) 64,00 € (C) 62,83 € (D) 62,10 € (E) 62,00 €
- 3) Katharina hüpfte auf einer Reihe von Fliesen. Sie beginnt auf der ersten und springt immer 3 Fliesen weiter (sie springt also auf die 4te, 7te, 10te Fliese usw.) und erreicht schließlich die letzte. Sie dreht sich um, springt jeweils 4 Fliesen weiter und erreicht wieder die erste. Sie dreht sich nochmals um, springt jeweils 5 Fliesen weiter und erreicht wieder die letzte. Dort dreht sie sich erneut um, springt jeweils 6 Fliesen weiter und erreicht wieder die erste Fliese. Welche der folgenden Zahlen könnte die Anzahl der Fliesen in der Reihe sein?
- (A) 391 (B) 271 (C) 301 (D) 270 (E) 360
- 4) Zwei Männer besitzen mehrere Münzen. Wenn der erste vom zweiten drei Münzen nimmt, dann hat er genauso viele, wie dem zweiten geblieben sind. Wenn hingegen der zweite vom ersten eine Münze nimmt, dann hat er dreimal so viele, wie dem ersten geblieben sind. Wie viele Münzen besitzen die zwei Männer insgesamt?
- (A) 14 (B) 18 (C) 12 (D) 13 (E) 16
- 5) Die reellen Zahlen x und y erfüllen die Gleichung $(6x - 5y)^4 + (4y - 3)^6 = 0$. Wie groß ist der Wert von $x + y$?
- (A) 1 (B) 10/7 (C) 4/3 (D) 13/9 (E) 11/8
- 6) Das Produkt von zwei natürlichen Zahlen ist 2160. Ihr größter gemeinsamer Teiler ist ungerade und größer als 1. Bezeichnet man mit m ihr kleinstes gemeinsames Vielfaches, dann gilt:
- (A) $m < 200$ (B) $200 < m < 400$ (C) $400 < m < 600$
 (D) $600 < m < 800$ (E) $m > 800$
- 7) Die drei Ecken eines rechtwinkligen Dreiecks, das einen Winkel von 54° hat, sind auch Ecken eines regelmäßigen Vielecks mit ...
- (A) 12 Seiten (B) 25 Seiten (C) 30 Seiten (D) 24 Seiten (E) 16 Seiten
- 8) Ein konvexes Zehneck besitzt 10 Innenwinkel. Die Anzahl der rechten Winkel kann höchstens folgende sein:
- (A) 5 (B) 3 (C) 4 (D) 2 (E) 6
- 9) Wie viele ganzzahlige Vielfache von 7, die zwischen 1 und 6000 liegen, sind Quadratzahlen?
- (A) 9 (B) 20 (C) 77 (D) 11 (E) 122
- 10) Das Viereck $ABCD$ ist in einen Kreis eingeschrieben. Man weiß, dass der Winkel bei A ein rechter ist, und dass $\overline{AB} = 24, \overline{BC} = 20, \overline{CD} = 15$. Wie groß ist die Länge von DA ?
- (A) 11 (B) 27 (C) 10 (D) 19 (E) 7

- 11) Marco besitzt zwei Würfel. Einer davon ist ein normaler Spielwürfel mit den nummerierten Seiten von 1 bis 6. Der andere hingegen ist ein spezieller Würfel, der zwei Seiten mit der Zahl 3, eine Seite mit der Zahl 4 und drei Seiten mit der Zahl 6 besitzt. Er wirft nun beide Würfel gleichzeitig. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der erhaltenen Augenzahlen gleich 10 ist?

(A) $2/9$ (B) $1/18$ (C) $1/9$ (D) $1/6$ (E) $1/12$

- 12) $PQRS$ sei ein rechtwinkliges Trapez, mit rechten Winkeln in P und S . Außerdem gilt: $\overline{PQ} > \overline{RS}$ und $\overline{PS} = 2 \cdot \overline{RS} = 62/5$. Sei K der Punkt auf der Seite PS mit $\overline{PK} = 8$. Man weiß außerdem, dass $\overline{SKR} = \overline{PQR}$. Wie groß ist die Länge der Seite KQ ?

(A) 17 (B) 13 (C) 15 (D) 16 (E) 20

- 13) Romeo, Julia, Helena, Paris, Achilles und Odysseus setzen sich auf eine Bank. Julia möchte neben Romeo sitzen und Helena neben Paris. Auf wie viele Arten können sich die sechs von rechts nach links hinsetzen, damit die beiden zufrieden sind?

(A) 720 (B) 120 (C) 24 (D) 96 (E) 180

- 14) Jeder Post der Mathematik-Olympiade, der auf Instagram veröffentlicht wird, muss 2 oder 3 Hashtags besitzen, die aus 10 vorgegebenen Hashtags ausgewählt werden können. Die Administratoren der Seite befolgen diese Regel: Wenn in einem Post das Hashtag „#ItaMO“ enthalten ist, dann muss auch „#cese2020“ vorkommen (das sind zwei der zehn Hashtags). Auf wie viele Arten kann die Menge der Hashtags zusammengestellt werden, die in einem Post eingefügt werden können?

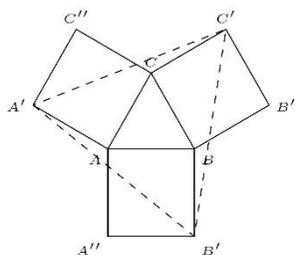
(A) 120 (B) 93 (C) 165 (D) 90 (E) 129

- 15) Um einen Tisch herum sitzen 10 Personen: jede kann entweder ein Edelmann oder ein Gauner sein. Immer wenn ein Edelmann spricht, ist der ausgesprochene Satz wahr; immer wenn ein Gauner spricht, ist der ausgesprochene Satz falsch. Einer von ihnen behauptet: „Zu meiner Rechten sitzt ein Edelmann und zu meiner Linken sitzt ein Gauner“. Jener, der rechts von ihm sitzt behauptet dann: „Zu meiner Linken sitzt ein Edelmann und zu meiner Rechten sitzt ein Gauner“. Jener, der wieder weiter rechts von diesem sitzt, behauptet: „Zu meiner Rechten sitzt ein Edelmann und zu meiner Linken sitzt ein Gauner“ und so weiter. Es wechseln sich die Behauptungen ab bis zur zehnten Person, die dann behauptet: „Zu meiner Linken sitzt ein Edelmann und zu meiner Rechten sitzt ein Gauner“. Unter den zehn anwesenden Personen gilt für die Gesamtzahl der Edelmannen:

- (A) Sie könnte 0, 2, 4, 6 oder auch 8, aber nicht 10 sein.
 (B) Sie könnte 0, 2 oder 4, aber nicht 6, 8 oder 10 sein.
 (C) Sie könnte 0, 2, 4 oder auch 6, aber nicht 8 oder 10 sein.
 (D) Sie könnte 2, 4 oder 6, aber nicht 0, 8 oder 10 sein.
 (E) Sie ist sicherlich 5.

- 16) Über den Seiten eines gleichseitigen Dreiecks ABC mit Seitenlänge 1 werden drei Quadrate konstruiert (siehe Abbildung). Welchen Umfang hat das Dreieck $A'B'C'$?

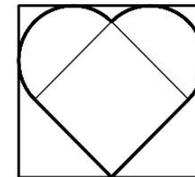
(A) $3\sqrt{4 + \sqrt{3}}$ (B) 6 (C) $3\sqrt{1 + 2\sqrt{3}}$
 (D) $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ (E) $\frac{3}{2} + \frac{3}{4}\sqrt{3}$



- 17) Carla wirft gleichzeitig 4 Spielwürfel, dessen Seiten mit den Zahlen von 1 bis 6 nummeriert sind. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Produkt der durch den Wurf erhaltenen vier Zahlen 24 ist?

(A) $5/162$ (B) $7/324$ (C) $1/36$ (D) $13/324$ (E) $5/144$

- 18) Die Verwalter der Instagram-Seite der Mathematik-Olympiade haben bemerkt, dass das Symbol für das Like die Form eines Herzens hat, das aus einem Quadrat besteht, über dessen zwei benachbarte Seiten zwei Halbkreise gesetzt sind. Das Herz kann in ein Rechteck eingeschrieben werden, dessen Seiten parallel zu den Diagonalen des Quadrats sind, wie hier im Bild dargestellt. Wenn die Quadratseite 1cm lang ist, dann ist die Fläche des Rechtecks in cm^2 gleich:



(A) $3\sqrt{2} - 2$ (B) $\frac{3+\sqrt{2}}{2}$ (C) $\frac{7}{8}(1 + \sqrt{2})$ (D) $\frac{3+2\sqrt{2}}{4}$ (E) $\frac{5}{4} + \sqrt{2}$

- 19) Ein Puzzle soll quadratisch sein mit n Puzzleteilen pro Seite. Jedes Puzzleteil hat vier Seiten und auf jeder Seite kann eine Einbuchtung oder eine Ausbuchtung sein, oder die Seite ist glatt (wenn das Teil sich am Rand befindet). Welche der folgenden Aussagen ist falsch?

- (A) Wenn die Anzahl der Puzzleteile ein Vielfaches von 21 ist, dann muss auch die Anzahl der Einbuchtungen ein Vielfaches von 21 sein.
 (B) Die Anzahl der Einbuchtungen ist gleich der Anzahl der Ausbuchtungen.
 (C) Wenn die Anzahl der Puzzleteile ein Vielfaches von 25 ist, dann muss auch die Anzahl der Einbuchtungen ein Vielfaches von 25 sein.
 (D) Die Anzahl der Ausbuchtungen ist ein Vielfaches von 4.
 (E) Wenn die Anzahl der Puzzleteile ungerade ist, dann ist die Anzahl der Teile ohne glatte Seite auch ungerade.

- 20) Das Dreieck DEF ist stumpfwinklig in E und hat den Umkreismittelpunkt in O . Die Winkelhalbierende durch E schneidet die Seite DF im Punkt P . Es sei bekannt, dass das konvexe Viereck $FEPO$ in einen Kreis eingeschrieben werden kann. Wie groß ist der Winkel \widehat{DFE} , wenn der Winkel $\widehat{EDF} = 52^\circ$ ist?

(A) 24° (B) 22° (C) 26° (D) 30° (E) 28°