Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

H557 – ABSCHLUSSPRÜFUNG AN DEN GYMNASIEN

Fachrichtungen: LI02, EA02 – REALGYMNASIUM

LI03, EA09 - REALGYMNASIUM – SCHWERPUNKT ANGEWANDTE NATURWISSENSCHAFTEN

Arbeit aus: MATHEMATIK

Lösen Sie eine der beiden folgenden Problemstellungen und bearbeiten Sie 5 der 10 gestellten Fragen.

PROBLEMSTELLUNG 1

Sie besuchen einen Vorbereitungskurs auf das Medizinstudium. Der Dozent erklärt die Bedeutung von mathematischen Modellen zur Beschreibung und Interpretation von Daten, die den Gesundheitszustand und die klinische Situation der Patienten betreffen. Sie sollen sich deshalb mit folgendem Problem befassen: "Wie verändert sich im Verlauf der Zeit die Konzentration eines Medikamentes im Blut?".

Wird ein Medikament intravenös verabreicht, so kann man vereinfachend annehmen, dass die Konzentration des Medikamentes im Blut sofort den maximalen Wert erreicht und dann proportional zur Konzentration selbst abzunehmen beginnt. Im konkreten Fall nimmt die Konzentration stündlich um 1/7 des Wertes ab, den sie zu Beginn der Stunde hatte.

1. Bestimmen Sie die Funktion $y(t)$, die bei einer anfänglichen Konzentration von $y(0) = 1\ \mu g/ml$ (Mikrogramm pro Milliliter) den oben dargelegten Verlauf der Konzentration des Medikamentes im Blut beschreibt. Stellen Sie den Graph der Funktion in einem Koordinatensystem dar, bei dem Sie auf der Abszisse die Zeit t in Stunden und auf der Ordinate die Konzentration in $\mu g/ml$ angeben.

Wird das Medikament hingegen intramuskulär verabreicht, so geht das Medikament über den Muskel in das Blut über. In diesem Fall nimmt man an, dass die Konzentration im Blut für eine bestimmte Zeit zunimmt, dann einen maximalen Wert erreicht und in der Folge mit einem ähnlichen Verlauf abnimmt, wie bei der intravenösen Verabreichung.

2. Wählen Sie unter den folgenden Funktionen jene aus, die sich am besten eignet, um den Verlauf der Konzentration des Medikamentes bei der intramuskulären Verabreichung zu beschreiben und begründen Sie Ihre Wahl:

$$y(t) = 1 - \frac{(t-4)^2}{16}$$

$$y(t) = \sin(3t) \cdot e^{-t}$$

$$y(t) = -t^3 + 3t^2 + t$$

$$y(t) = \frac{7}{2}\left(e^{-\frac{t}{7}} - e^{-\frac{t}{5}}\right)$$

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

H557 – ABSCHLUSSPRÜFUNG AN DEN GYMNASIEN

Fachrichtungen: LI02, EA02 – REALGYMNASIUM

LI03, EA09 - REALGYMNASIUM – SCHWERPUNKT ANGEWANDTE NATURWISSENSCHAFTEN

Arbeit aus: MATHEMATIK

3. Stellen Sie den Graph der von Ihnen gewählten Funktion in einem Koordinatensystem dar, bei dem Sie auf der Abszisse die Zeit t in Stunden und auf der Ordinate die Konzentration in $\mu g/ml$ angeben. Beschreiben Sie die wichtigsten Eigenschaften im Vergleich zum Graph der Funktion für die intravenöse Verabreichung.

Um Schäden in Organen zu vermeiden, in denen sich das Medikament anhäuft, ist es notwendig, die Konzentration des Medikamentes im Blut unter Kontrolle zu halten. Man nimmt an, dass sich das Medikament mit einer Geschwindigkeit v [angegeben in $\mu g/(ml \cdot h)$] anhäuft, die proportional zur Konzentration im Blut ist: $v(t) = k \cdot y(t)$.

4. Bestimmen Sie für die in den vorhergehenden Punkten beschriebene intravenöse und intramuskuläre Verabreichung jeweils die Gesamtmenge des Medikamentes in einem Organ. Bei welcher Verabreichungsform ist die angehäufte Menge des Medikamentes größer?

PROBLEMSTELLUNG 2

Gegeben ist die Funktion f definiert durch $f(x) = (4x - 2) \cdot e^{2x}$.

1. Beweisen Sie, dass die Funktion ein einziges Minimum und einen einzigen Wendepunkt besitzt. Berechnen Sie die Koordinaten des Minimums und des Wendepunktes und zeichnen Sie den Graph G_f der Funktion.
2. Beweisen Sie, dass die Funktion g mit $g(x) = (-4x - 2) \cdot e^{-2x}$ symmetrisch zu f bezüglich der y-Achse ist und zeichnen Sie ihren Graph G_g.
3. Die Graphen G_f und G_g schneiden die x-Achse jeweils in einem Punkt P und Q. Bestimmen Sie die Fläche des ebenen Bereichs A, der von der Strecke $\overline{PQ}$ und von den Graphen G_f und G_g begrenzt wird.
4. Es sei f_a die Funktionenschar definiert durch da $f_a(x) = (2ax - 2) \cdot e^{ax}$ mit $a \in R \setminus \{0\}$. Für jede Funktion f_a begrenzt die Tangente, die man im Wendepunkt an den Graph legt, mit der x-Achse und der y-Achse ein rechtwinkliges Dreieck. Bestimmen Sie die Werte von a, für die dieses Dreieck auch gleichschenklig ist. Erklären Sie, wie Sie dabei vorgehen.

Außerordentlicher Termin 2015
Zweite schriftliche Prüfung

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

H557 – ABSCHLUSSPRÜFUNG AN DEN GYMNASIEN

Fachrichtungen: LI02, EA02 – REALGYMNASIUM

LI03, EA09 - REALGYMNASIUM – SCHWERPUNKT ANGEWANDTE NATURWISSENSCHAFTEN

Arbeit aus: MATHEMATIK

LISTE DER FRAGEN

1. Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der entsteht, wenn der ebene Bereich, der von der Kurve $y = x^3 - 3x + 3$ und der Geraden $y = 3$ begrenzt wird, um die Gerade $y = 3$ rotiert.
2. Zeigen Sie, dass die Funktion:

   $$f(x) = \frac{1}{3^{\frac{1}{x}} + 1}$$

   eine Sprungstelle besitzt, während die Funktion:

   $$f(x) = \frac{x}{3^{\frac{1}{x}} + 1}$$

   eine hebbare Lücke besitzt.
3. Während einer Grippeepidemie liegen 15% der Bevölkerung krank zu Hause.
   a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit fehlen in einer Klasse mit 20 Schülern mehr als zwei Schüler wegen Grippe?
   b) Beschreiben Sie die Vorgangsweise um nachzuweisen, dass bei einer Schule mit 500 Schülern die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 50 Schüler an Grippe erkrankt sind, größer als 99% ist.
4. Im Raum sind zwei Ebenen α und β gegeben, definiert durch die Gleichungen:

   α) $x - 3y + z - 5 = 0$

   β) $x + 2y - z + 3 = 0$

   Bestimmen Sie die Gleichung der von den beiden Ebenen bestimmten Geraden r und zeigen Sie, dass die Gerade auf der Ebene γ mit der Gleichung $3x + y - z + 1 = 0$ liegt.
5. Jede Tangente, die an die Parabel $y = 4 - x^2$ gelegt werden kann, begrenzt im ersten Quadranten mit den Koordinatenachsen ein Dreieck. Bestimmen Sie den Berührungspunkt jener Tangente, für den die Fläche des Dreiecks minimal ist.
6. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion einer stetigen Zufallsvariablen X, die bei einer Gleichverteilung Werte x im Intervall [2, 5] annimmt. Bestimmen Sie den Erwartungswert, die Varianz und Standardabweichung der Zufallsvariablen und die Wahrscheinlichkeit, dass $\frac{7}{3} \le x \le \frac{17}{4}$ ist.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

H557 – ABSCHLUSSPRÜFUNG AN DEN GYMNASIEN

Fachrichtungen: LI02, EA02 – REALGYMNASIUM

LI03, EA09 - REALGYMNASIUM – SCHWERPUNKT ANGEWANDTE NATURWISSENSCHAFTEN

Arbeit aus: MATHEMATIK

7. Berechnen Sie den Mittelwert der Funktion:

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & 1\le x\le 3 \\ e^{x-3}+1 & 3<x\le 6 \end{cases}$$

im Intervall [1, 6] und bestimmen Sie den Wert von x, für den die Funktion den Mittelwert annimmt.

8. Der Radius einer Kugel verändert sich mit der Zeit laut einer gegebenen Funktion $r(t)$. Berechnen Sie den Radius der Kugel im Zeitpunkt, an dem die Zunahmegeschwindigkeit der Kugeloberfläche und die Zunahmegeschwindigkeit des Radius den gleichen Wert haben.

9. In einem räumlichen kartesischen Koordinatensystem *Oxyz* ist die Gerade *r* definiert durch:

$$\begin{cases} x=2t+1 \\ y=1+t \\ z=kt \end{cases}$$

und die Ebene *P*, gegeben durch die Gleichung: $x + 2y - z + 2 = 0$.

Bestimmen Sie, für welchen Wert von *k* die Gerade *r* und die Ebene *P* parallel sind und berechnen Sie ihren Abstand voneinander.

10. Geben Sie die Gleichung des Kreises *K* an, dessen Mittelpunkt auf der y-Achse liegt und der den Graph G_f von $f(x) = x^3 - 3x^2$ im Wendepunkt berührt.

Dauer der Arbeit: 6 Stunden.
Es ist nur die Benützung eines nicht programmierbaren Taschenrechners erlaubt.
Der Gebrauch eines zweisprachigen Wörterbuchs (Deutsch – Sprache des Herkunftslandes) ist für die Schülerinnen und Schüler mit Migrationshintergrund erlaubt.
Das Schulgebäude darf erst drei Stunden nach Bekanntgabe des Themas verlassen werden.