

PROGETTTO OLIMPIADI DI MATEMATICA U.M.I UNIONE MATEMATICA ITALIANA MINISTERIO DELLA DURBI IGA ISTRUZIONE

U.M.I UNIONE MATEMATICA ITALIANA MINISTERO DELLA PUBBLICA ISTRUZIONE SCUOLA NORMALE SUPERIORE



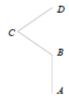
17 novembre 2010



- 1) Die Arbeit besteht aus 20 Aufgaben. Für jede Frage stehen fünf Antwoten zur Auswahl; sie sind mit den Buchstaben A, B, C, D, E gekennzeichnet.
- 2) Nur eine dieser Antworten ist richtig, die anderen vier sind falsch. Jede richtige Antwort zählt 5 Punkte, jede falsche 0 Punkte, jede Frage ohne Antwort 1 Punkt.
- 3) Für jede Aufgabe musst du den Buchstaben, der deiner Meinung nach zur richtigen Antwort gehört, in das unten stehende Raster eintragen. Löschungen oder Korrekturen sind NICHT erlaubt. DIE BENUTZUNG EINES TASCHENRECHNERS IST NICHT GESTATTET!
- 4) Für die gesamte Arbeit stehen dir 120 Minuten zur Verfügung. Gute Arbeit und viel Vergnügen!

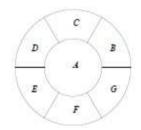
Vorname:							Nachname:										Klasse:					
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20			

- 1) Wie viele Montage höchstens können innerhalb 45 aufeinanderfolgender Tage vorkommen?
 - **(A)** 5, **(B)** 6, **(C)** 7, **(D)** 8, **(E)** 9.
- 2) Im Dunkeln zieht Emilio Socken aus einem Korb, der 6 schwarze, 14 blaue und 8 grüne Socken enthält. Wie viele Socken muss er dem Korb mindestens entnehmen, um sicher zu sein, dass er zwei Socken der gleichen Farbe gezogen hat?
 - **(A)** 3, **(B)** 4, **(C)** 9, **(D)** 15, **(E)** 21.
- 3) Die nebenstehende Figur stellt den Weg dar, den Pluto zurücklegt, wenn er von seinem Körbchen (Position A), zur Bar (Position D) geht. Die 3 Seiten AB, BC und CD sind je 100 m lang. Der Winkel ∠(A, B, C) im Innern des Dreiecks ABC misst 120°, der Winkel ∠(B, C, D) im Innern des Dreiecks BCD misst 60°. Wie lang ist die kürzeste geradlinige Entfernung der Bar vom Körbchen?



(A) 100 m, (B) $100\sqrt{3} \ m$, (C) 200 m, (D) 330 m, (E) $200\sqrt{3} \ m$.

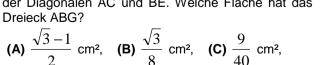
- 4) Welche der folgenden Ungleichungen ist wahr?
 - (A) $2\sqrt{2} < \sqrt{10} < \sqrt{5} + \sqrt{3}$, (B) $\sqrt{5} + \sqrt{3} < 2\sqrt{2} < \sqrt{10}$,
 - (C) $2\sqrt{2} < \sqrt{5} + \sqrt{3} < \sqrt{10}$, (D) $\sqrt{10} < 2\sqrt{2} < \sqrt{5} + \sqrt{3}$,
 - **(E)** $\sqrt{5} + \sqrt{3} < \sqrt{10} < 2\sqrt{2}$.
- 5) Mathilde will ihrer Mutter eine Margerite aus Pappe basteln. Sie schneidet einen gelben Kreis aus und setzt ihn in die Mitte. Für die Blütenblätter schneidet sie weiße Kreise mit demselben Radius wie der gelbe Kreis aus. Diese Blütenblätter ordnet sie wie folgt an: das erste berührt den gelben Kreis von außen, das zweite berührt sowohl den gelben Kreis als auch das erste Blütenblatt von außen, usw. bis zum letzten Blütenblatt, das sowohl das vorletzte als auch das erste Blütenblatt von außen berührt und auch den gelben Kreis von außen berührt. Wie viele Blütenblätter hat die Margerite?
 - (A) 3, (B) 4, (C) 5, (D) 6, (E) Diese Anordnung ist nicht durchführbar: Das letzte Blütenblatt überdeckt notwendigerweise das erste Blütenblatt.
- 6) a, b, und c sind drei reelle Zahlen mit folgender Eigenschaft: Die Summe zweier beliebig daraus gewählter Zahlen ist größer oder gleich 0. Welche der folgenden Aussagen ist dann sicher wahr?
 - (A) $a \cdot b \cdot c \ge 0$, (B) mindestens eine der drei Zahlen muss 0 sein, (C) mindestens eine der drei Zahlen ist kleiner als 0, (D) a, b und c sind alle größer oder gleich 0, (E) $a + b + c \ge 0$.
- 7) Concetta stellt sich eine Welt vor, die platt und rund ist. Sie teilt sie in 7 Staaten ein, einen zentralen und sechs rundherum, wie es die nebenstehende Abbildung darstellt. Außerdem ordnet sie jedem Staat einen Buchstaben zu (siehe Abbildung). Sie will jeden Staat rot oder grün oder gelb färben, so dass zwei angrenzende Staaten nie dieselbe Farbe haben. In wie vielen verschiedenen Arten ist dies möglich?

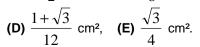


- (A) keine, (B) 2, (C) 4, (D) 5, (E) 6.
- 8) Albert geht von A nach B und kehrt wieder ohne sich in B aufzuhalten sofort nach A zurück. Barbara geht von B nach A und kehrt ebenfalls ohne sich in A aufzuhalten sofort nach B zurück. Beide bewegen sich geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit (die nicht notwendigerweise bei beiden gleich sein muss) fort. Beide starten im selben Augenblick, treffen sich ein erstes Mal auf dem Hinweg 700 m von B entfernt, und ein zweites Mal auf dem Rückweg (während Alberto von B nach A

spaziert und Barbara von A nach B) 400 m von A entfernt. Wie weit ist A von B entfernt?

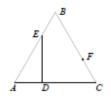
- (A) 900 m, (B) 1100 m, (C) 1700 m, (D) 2000 m,
- (E) das kann man nicht ermitteln.
- 9) Luca schreibt alle geraden aufeinander folgenden Zahlen zwischen 2 und 2010 (beide inbegriffen) an die Tafel. Dann löscht Giovanni alle Vielfachen von 3. Wie viele Zahlen bleiben übrig?
 - **(A)** 670, **(B)** 710, **(C)** 840, **(D)** 905, **(E)** 1005.
- 10) Silvano ist der reichste Mann auf dem Planeten Neptun. Er besitzt eine Autobahn mit vielen Fahrspuren. In einem Moment des wirtschaftlichen Aufschwungs beschließt er, die Anzahl der Fahrspuren um 60 % zu erhöhen. Nach einem alten Gesetz, das auf Neptun Gültigkeit hat, muss er anschließend die Anzahl der Fahrspuren um einen Prozentsatz X verringern. Nachdem er dies durchgeführt hat, hat er gleich viele Fahrspuren wie vorher. Wie groß ist X?
 - (A) 15%, (B) 21,5%, (C) 28%, (D) 37,5%, (E) 60%.
- 11) In einem Dreieck messen zwei Winkel 30° und 105°, die dazwischen liegende Seite misst 2 cm. Welchen Umfang hat das Dreieck?
 - (A) $(5+\sqrt{3})cm$ (B) $(2+2\sqrt{3}+\sqrt{2})cm$, (C) $(3+\sqrt{3}+\sqrt{2})cm$,
 - **(D)** $(5+\sqrt{2})cm$, **(E)** $(2+3\sqrt{3})cm$.
- 12) Wie groß ist die Summe der Zahlen 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 + 4 + + 35 + 36?
 - (A) 990, (B) 1105, (C) 1295, (D) 1395, (E) 1505.
- 13) Schreibt man alle natürlichen Zahlen von 1 bis 2010 (beide inbegriffen), eine an die andere angehängt, so bilden sie *eine* neue natürliche Zahl. Wie viele Stellen hat diese Zahl?
 - (A) 2010, (B) 3540, (C) 5225, (D) 6933, (E) 7253.
- 14) Die Punkte ABCDEF bilden ein regelmäßiges Sechseck mit der Seite 1 cm. Sei G der Schnittpunkt der Diagonalen AC und BE. Welche Fläche hat das Dreieck ABG?





- 15) Aus wie vielen Ziffern besteht der Quotient (112233445566778899)/11? **(A)** 9, **(B)** 13, **(C)** 17, **(D)** 19, **(E)** 23.
- 16) Wie viele vierstellige natürliche Zahlen gibt es, deren Einerziffer die Summe der Zehner- und der Hunderterziffer ist?

 (A) 315, (B) 495, (C) 540, (D) 720, (E) 900.
- 17) In einem gleichseitigen Dreieck mit der Seitenlänge 3 m wählen wir die Punkte D auf der Seite AC, E auf der Seite AB und F auf der Seite BC so, dass die Strecken AD und FC 1 m lang sind und die Strecke DE senkrecht auf der Seite AC steht. Welchen Flächeninhalt hat das Dreieck DEF?



- (A) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ m², (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ m², (C) $3\sqrt{3}$ m², (D) $\frac{3}{2}$ m², (E) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ m².
- 18) Ein berühmter Detektiv sucht den Täter eines Mordes im Kreise von fünf Verdächtigen: Anna, Bruno, Cecilia, Dario und Enrico. Er weiß, dass der Täter immer lügt, während die anderen stets die Wahrheit sagen. Anna behauptet: "Der Schuldige ist ein Mann!" Cecilia meint: "Es war Anna oder es war Enrico." Schließlich sagt Enrico: "Wenn Bruno schuldig ist, dann ist Anna unschuldig." Wer hat den Mord begangen?

 (A) Anna, (B) Bruno, (C) Cecilia, (D) Dario, (E) Enrico.
- 19) Wie viele geordnete Paare (x, y), bestehend aus ganzen Zahlen, die größer sind als 1, erfüllen die Gleichung x² + y = xy + 1?
 (A) keines, (B) eines, (C) zwei, (D) drei, (E) mehr als vier.
- 20) Ciro zerschneidet ein gleichseitiges Dreieck von 20 cm Seitenlänge aus Karton in einige Teile. Diese Teile legt er anschließend so zusammen, dass sie sich nicht überschneiden und ein Quadrat bilden. Wie lang ist die Seite des Quadrates?
 - (A) 20 cm, (B) $10\sqrt[4]{3}$ cm, (C) 15 cm, (D) $8\sqrt[4]{2}$ cm, (E) $10\sqrt{3}$ cm.



PROGETTTO OLIMPIADI DI MATEMATICA

U.M.I UNIONE MATEMATICA ITALIANA MINISTERO DELLA PUBBLICA ISTRUZIONE SCUOLA NORMALE SUPERIORE

I Giochi di Archimede - Gara Triennio

17 novembre 2010



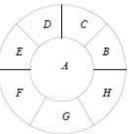
- Die Arbeit besteht aus 25 Aufgaben. Für jede Frage stehen fünf Antworten zur Auswahl; sie sind mit den Buchstaben A. B. C. D. E gekennzeichnet.
- Nur eine dieser Antworten ist richtig, die anderen vier sind falsch. Jede richtige Antwort zählt 5 Punkte, jede falsche 0 Punkte, jede Frage ohne Antwort 1 Punkt.
- 3) Für jede Aufgabe musst du den Buchstaben, der deiner Meinung nach zur richtigen Antwort gehört, in das unten stehende Raster eintragen. Löschungen oder Korrekturen sind NICHT erlaubt. DIE BENUTZUNG EINES TASCHENRECHNERS IST NICHT GESTATTET:
- 4) Für die gesamte Arbeit stehen dir 120 Minuten zur Verfügung. Gute Arbeit und viel Vergnügen!

Vorname:								Nachname:											Klasse:						
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

- 1) Wie viele Montage höchstens können innerhalb 45 aufeinander folgender Tage vorkommen?
 - (A) 5, (B) 6, (C) 7, (D) 8, (E) 9.
- 2) Im Dunkeln zieht Emilio Socken aus einem Korb, der 6 schwarze, 14 blaue und 8 grüne Socken enthält. Wie viele Socken muss er dem Korb mindestens entnehmen, um sicher zu sein, dass er zwei Socken der gleichen Farbe gezogen hat?
 - (A) 3, (B) 4, (C) 9, (D) 15, (E) 21.
- 3) Aus wie vielen Ziffern besteht das Quadrat einer zehnstelligen natürlichen Zahl? (A) weniger als 25, (B) 40, (C) 50, (D) 60, (E) mindestens 100.
- 4) Welche der folgenden Ungleichungen ist wahr?
 - (A) $2\sqrt{2} < \sqrt{10} < \sqrt{5} + \sqrt{3}$, (B) $\sqrt{5} + \sqrt{3} < 2\sqrt{2} < \sqrt{10}$
 - (c) $2\sqrt{2} < \sqrt{5} + \sqrt{3} < \sqrt{10}$, (D) $\sqrt{10} < 2\sqrt{2} < \sqrt{5} + \sqrt{3}$,
 - (E) $\sqrt{5} + \sqrt{3} < \sqrt{10} < 2\sqrt{2}$.
- 5) Mathilde will ihrer Mutter eine Margerite aus Pappe basteln. Sie schneidet einen gelben Kreis aus und setzt ihn in die Mitte. Für die Blütenblätter schneidet sie weiße Kreise mit demselben Radius wie der gelbe Kreis aus. Diese Blütenblätter ordnet sie wie folgt an: das erste berührt den gelben Kreis von außen, das zweite berührt sowohl den gelben Kreis als auch das erste Blütenblatt von außen, usw. bis zum letzten Blütenblatt, das sowohl das vorletzte als auch das erste Blütenblatt von außen berührt und auch den gelben Kreis von außen berührt. Wie viele Blütenblätter hat die Margerite?
 - (A) 3, (B) 4, (C) 5, (D) 6, (E) Diese Anordnung ist nicht durchführbar: Das letzte Blütenblatt überdeckt notwendigerweise das erste Blütenblatt.
- 6) a, b, und c sind drei reelle Zahlen mit folgender Eigenschaft: Die Summe zweier beliebig daraus gewählter Zahlen ist größer oder gleich 0. Welche der folgenden Aussagen ist

dann sicher wahr?

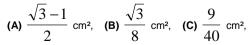
- (A) a·b·c ≥ 0 , (B) mindestens eine der drei Zahlen muss 0 sein, (C) mindestens eine der drei Zahlen ist kleiner als 0, (D) a, b und c sind alle größer oder gleich 0, (E) $a + b + c \geq 0$.
- 7) Concetta stellt sich eine Welt vor, die platt und rund ist. Sie teilt sie in 8 Staaten ein, einen zentralen und sieben rundherum, wie es die nebenstehende Abbildung darstellt. Außerdem ordnet sie jedem Staat einen Buchstaben zu (siehe Abbildung). Sie will jeden Staat rot oder grün oder gelb färben, so dass zwei angrenzende Staaten nie dieselbe Farbe haben. In wie vielen verschiedenen Arten ist dies mödlich?
 - (A) keine, (B) 2, (C) 4, (D) 5, (E) 6.



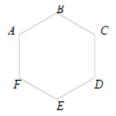
- 8) Silvano ist der reichste Mann auf dem Planeten Neptun. Er besitzt eine Autobahn mit vielen Fahrspuren. In einem Moment des wirtschaftlichen Aufschwungs beschließt er, die Anzahl der Fahrspuren um 60 % zu erhöhen. Nach einem alten Gesetz, das auf Neptun Gültigkeit hat, muss er anschließend die Anzahl der Fahrspuren um einen Prozentsatz X verringern. Nachdem er dies durchgeführt hat, hat er gleich viele Fahrspuren wie vorher. Wie groß ist X?
 - (A) 15%, (B) 21,5%, (C) 28%, (D) 37,5%, (E) 60%.
- 9) In einem Dreieck messen zwei Winkel 30° und 105°, die dazwischen liegende Seite misst 2 cm. Welchen Umfang hat das Dreieck?

(A)
$$(5+\sqrt{3})cm$$
 (B) $(2+2\sqrt{3}+\sqrt{2})cm$, (C) $(3+\sqrt{3}+\sqrt{2})cm$, (D) $(5+\sqrt{2})cm$, (E) $(2+3\sqrt{3})cm$.

- 10) Wie groß ist die Summe der Zahlen 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 + 4 + + 35 + 35 + 36?
 (A) 990, (B) 1105, (C) 1295, (D) 1395, (E) 1505.
- 11) Die Mannschaft der Mathematiker nimmt an einer Meisterschaft teil, bei der jeder Sieg 3 Punkte bedeutet, jedes Unentschieden 1 Punkt und jede Niederlage 0 Punkte. Nach den ersten 13 Spielen hat die Mannschaft 29 Punkte gesammelt und dabei so viele Niederlagen wie Unentschieden erreicht. Wie viele Spiele hat sie bisher gewonnen?
 (A) 4, (B) 6, (C) 8, (D) 9, (E) 11.
- 12) Für wieviele verschiedene Werte der natürlichen Zahl n hat die Gleichung
 3x² + 2nx + 3 = 0 zwei voneinander verschiedene reelle Lösungen, wobei diese Lösungen beide ganze Zahlen sind?
 (A) keine, (B) 1, (C) 2, (D) 4, (E) mehr als 5.
- 13) Die Punkte ABCDEF bilden ein regelmäßiges Sechseck mit der Seite 1 cm. Sei G der Schnittpunkt der Diagonalen AC und BE. Welche Fläche hat das Dreieck ABG?



(D)
$$\frac{1+\sqrt{3}}{12}$$
 cm², (E) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ cm².



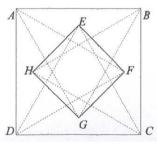
- 14) Aus wie vielen Ziffern besteht der Quotient (111222333444555666777888999)/111? (A) 13. (B) 21. (C) 25. (D) 27. (E) 29.
- 15) Ein Athlet läuft eine Strecke von 5 km in 16 Minuten und 40 Sekunden. Während des Laufes erhöht er nach und nach seine Geschwindigkeit, so dass er für ieden Kilometer 5 Sekunden weniger als für den vorhergehenden Kilometer braucht. Wie lange braucht er für den letzten Kilometer?
 - (A) 2 Minuten und 55 Sekunden, (B) 3 Minuten,
 - (C) 3 Minuten und 5 Sekunden, (D) 3 Minuten und 10 Sekunden,
 - (E) 3 Minuten und 15 Sekunden.
- 16) Wie viele verschiedene Tripel (x, y, z), bestehend aus ganzen Zahlen zwischen 0 und 100 (Grenzen inbegriffen), erfüllen die Gleichung

$$(x-y)^2 + (y+z)^2 = (x+y)^2 + (y-z)^2$$
?
(A) 101·201, (B) 10⁶, (C) 101², (D) 10⁴, (E) 51·301

17) In der nebenstehenden Abbildung hat das Quadrat ABCD die Seitenlänge 1 m und die Dreiecke ABG, BCH, CDE und DAF sind gleichseitig. Wie groß ist der Flächeninhalt von EFGH?

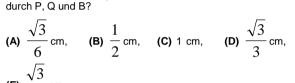
(A)
$$\frac{1}{6}$$
 m², (B) $\frac{1}{4}$ m², (C) $(2-\sqrt{3})$ m²,

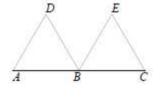
(D)
$$(3\sqrt{3}-5)$$
m², (E) $\frac{1}{3}$ m².



- 18) Wie viele Quadratzahlen mit mindestens 3 Ziffern sind kleiner oder gleich 2010-2011? (A) 1890, (B) 1910, (C) 2001, (D) 2011, (E) 2110.
- 19) Major Tom ist auf einem unbekannten Planeten gelandet. Auf dem Planeten gibt es violette Katzen, die immer die Wahrheit sagen, und schwarze Katzen, die immer lügen. In völliger Dunkelheit trifft er 5 Katzen, die sich mit folgenden Aussagen an ihn wenden. Erste Katze: "Ich bin violett.", zweite Katze: "Mindestens drei von uns sind violett." Dritte Katze: "Die erste Katze ist schwarz.". vierte Katze: "Mindestens drei von uns sind schwarz." und fünfte Katze: "Wir sind alle schwarz." Wie viele von den 5 Katzen sind violett?
 - (A) keine, (B) 1, (C) 2, (D) 3, (E) 4.
- 20) Valeria muss sich für eine Nummernkombination ihres Tresors entscheiden. Diese fünfstellige Zahl muss durch 3 teilbar sein und ihre Ziffern müssen alle verschieden von Null sein; außerdem müssen von den ersten 4 Ziffern (von links) genau zwei gerade und zwei ungerade sein. Wie viele Möglichkeiten für so eine Nummernkombination hat sie?
 - (A) $2^5 \cdot 5^2$, (B) $2^5 \cdot 5^2 \cdot 3^2$, (C) $2^2 \cdot 5^3 \cdot 3^2$, (D) $5^2 \cdot 3^4$, (E) $2^{10} \cdot 5 \cdot 3$
- 21) An der Universität im Märchenland gibt es unendlich viele Studenten und das Gähnen ist sehr ansteckend. Jedes Mal, wenn ein Student gähnt, gähnen nach 5 Sekunden zwei weitere Studenten. Wer bereits gegähnt hat, tut dies nicht mehr. Gestern war auch Dornröschen als Studentin in der Universität und da sie sehr müde war, hat sie als erste gegähnt. Wie viele Studenten haben in den folgenden 57 Sekunden gegähnt (einschließlich Dornröschen)?
 - (A) 2047, (B) 3024, (C) 3625, (D) 4095, (E) 8192.

- 22) Der Zauberer Merlin hat 7 weiße und 7 schwarze Kugeln. Er kann zwei Arten von Zaubertricks: Beim ersten Trick lässt er 3 schwarze Kugeln verschwinden und 2 weiße Kugeln erscheinen (das kann Merlin nur machen, wenn wenigstens 3 schwarze Kugeln da sind): beim zweiten Trick lässt er 4 weiße Kugeln verschwinden und 9 schwarze erscheinen (das kann Merlin nur machen, wenn wenigstens 4 weiße Kugeln da sind), Kann es sein, dass er - nachdem er ein paar Mal auf die eine oder andere Art gezaubert hat – folgende Kugeln hat?
 - (A) 2 weiße und 15 schwarze, (B) 4 weiße und 14 schwarze,
 - (C) 3 weiße und 11 schwarze, (D) 7 weiße und 13 schwarze,
 - (E) 10 weiße und 10 schwarze.
- 23) In der nebenstehenden Abbildung misst AC 2 cm. B ist der Mittelpunkt der Strecke AC und die Dreiecke ABD und BCE sind gleichseitig. Wenn P und Q die Mittelpunkte von ABD bzw. BCE sind, wie groß ist dann der Radius des Kreises





24) Ein Kegel hat ein Volumen von 1 m³. Man schneidet ihn parallel zur Grundfläche in einer Entfernung von einem Viertel der Höhe von der Spitze aus gemessen ab. Man erhält so einen neuen Kegel. Wie groß ist dessen Volumen?

(A)
$$\frac{1}{64}$$
 m³, (B) $\frac{3}{64}$ m³, (C) $\frac{27}{64}$ m³, (D) $\frac{48}{64}$ m³, (E) $\frac{63}{64}$ m³.

25) Eine Mannschaft besteht aus 11 Spielern, Jeder Spieler trägt eins der 11 Leibchen, die von 1 bis 11 durchnummeriert sind. Die Spieler treten in zufälliger Reihenfolge einzeln in den Umkleideraum ein. Jeder nimmt sich, sobald er eintritt, zufällig ein Leibchen, außer Danilo, der das Leibchen mit der Nummer 8 bevorzugt und – wenn es noch frei ist – genau dieses wählt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit schafft es Danilo, das Leibchen mit seiner Lieblingsnummer zu ergattern?

(A)
$$\frac{4}{9}$$
, (B) $\frac{5}{11}$, (C) $\frac{1}{2}$, (D) $\frac{6}{11}$, (E) $\frac{5}{9}$.