

PROBLEMA 1: Una collisione tra meteoriti

1] La curva geometrica rappresentata dal grafico nel piano $t-v$ è una parabola con asse di simmetria parallelo all'asse v la cui equazione è del tipo $v(t) = at^2 + bt + c$ oppure, note le coordinate del vertice (t_v, v_v) , del tipo $v - v_v = a(t - t_v)^2$ (con $a < 0$ poichè è convessa ovvero ha la concavità volta verso il basso).

La sua equazione si determina sostituendo le coordinate del vertice $V(5,30)$

$$v - 30 = a \cdot (t - 5)^2$$

$$v - 30 = a (t - 5)^2 \tag{1}$$

e imponendo il passaggio per il punto $A(0,5)$.

$$(5 - 30 = a \cdot (0 - 5)^2, a) \quad \text{si ottiene}$$

$$-1 \tag{2}$$

Quindi l'equazione della velocità in funzione del tempo (con $t \geq 0$) del primo meteorite rappresentata nel grafico è:

$$v - 30 = -1 \cdot (t - 5)^2$$

$$v - 30 = -(t - 5)^2 \tag{3}$$

$$v - 30 = -t^2 + 10t - 25 \tag{4}$$

$$v = -t^2 + 10t + 5 \tag{5}$$

2] La funzione $s(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 5t^2 + 5t$ che appare sul monitor rappresenta la legge oraria del moto del primo meteorite se la sua funzione derivata prima coincide con la funzione $v(t)$ ricavata al punto 1.

$$s'(t) = \frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{3}t^3 + 5t^2 + 5t \right)$$

$$D(s)(t) = -t^2 + 10t + 5 \tag{6}$$

Poichè l'espressione della funzione **(5)** coincide con la **(6)**, si è verificato che $s(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 5t^2 + 5t$ che appare sul monitor rappresenta la **legge oraria del moto del primo meteorite**.

3] Supposto che le traiettorie siano complanari in un piano $x-y$ e abbiano equazione $f(x,y)=0$ e $g(x,y)=0$, l'urto avviene se nello stesso istante i due meteoriti si trovano nello stesso punto di coordinate $U(x_U, y_U)$ in cui le curve delle traiettorie s'intersecano ovvero se l'equazione $f(x_U, y_U) = g(x_U, y_U)$ è identicamente soddisfatta.

4] La legge oraria del primo meteorite cambia nell'istante corrispondente al punto d'intersezione delle due leggi orarie (altrimenti si verificherebbe un salto temporale)

$$-\frac{1}{3} \cdot t^3 + 5 \cdot t^2 + 5 \cdot t = 2 \cdot t^2 + \frac{5}{3} \cdot t \quad \text{ottenendo le soluzioni}$$

$$0, 10, -1 \tag{7}$$

Solo l'istante $t=10$ s è accettabile, sono da scartare tempi negativi e l'istante iniziale $t=0$ s in cui il primo meteorite parte.

5] La legge oraria del primo meteorite nell'intervallo tra 0 e t_{urto} ovvero tra 0 s e 30 s è una funzione definita a tratti:

$$h(t) := \begin{cases} -\frac{1}{3} \cdot t^3 + 5 \cdot t^2 + 5 \cdot t & 0 \leq t \leq 10 \\ 2 \cdot t^2 + \frac{5}{3} \cdot t & 10 < t \leq 30 \end{cases} :$$

$h(t)$ è una funzione continua in $t=10$ infatti:

$$\lim_{t \rightarrow 10^-} \left(-\frac{1}{3} \cdot t^3 + 5 \cdot t^2 + 5 \cdot t \right) = \lim_{t \rightarrow 10^+} \left(2 \cdot t^2 + \frac{5}{3} \cdot t \right) = \frac{650}{3} = \frac{650}{3} \quad (8)$$

La funzione passa per il punto $I(10, 650/3) \approx (10, 200)$

Per rappresentare $h(t)$ studio prima la funzione $s1(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 5t^2 + 5t$ in $[0, 10]$ e poi considero la funzione $s2(t) = 2 \cdot t^2 + \frac{5}{3} \cdot t$ in $]10, 30]$.

$0 = -\frac{1}{3}t^3 + 5t^2 + 5t$ ottenendo le soluzioni

$$0, \frac{15}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{285}, \frac{15}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{285} \quad (9)$$

in $[0, 10]$ la funzione si annulla solo in $t=0$

$$-\frac{1}{3}t^3 + 5t^2 + 5t > 0$$

in $]0, 10]$ la funzione è positiva.

La sua derivata prima ha equazione $s' = -t^2 + 10t + 5$ in $[0, 10]$

$0 = -t^2 + 10t + 5$ ottenendo

$$5 + \sqrt{30}, 5 - \sqrt{30} \quad (10)$$

in $[0, 10]$ s' non si annulla.

$-t^2 + 10t + 5 > 0$ ottenendo

$$\{t < 5 + \sqrt{30}, 5 - \sqrt{30} < t\} \quad (11)$$

in $[0, 10]$ s' è sempre positiva quindi la funzione è sempre crescente.

La sua derivata seconda ha equazione $s'' = -2 \cdot t + 10$ in $[0, 10]$

$0 = -2 \cdot t + 10$

$$5 \quad (12)$$

in $[0, 10]$ si annulla per $t=5$.

$-2 \cdot t + 10 > 0$ ottenendo

$$\{t < 5\}$$

(13)

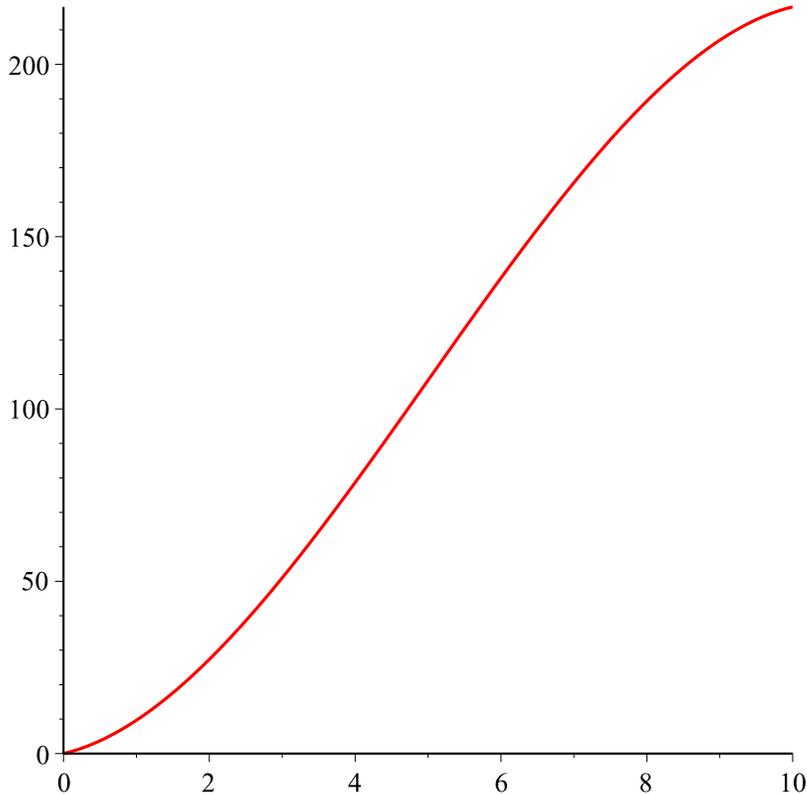
in $[0,5[$ s'' è positiva quindi la funzione volge la concavità verso l'alto, in $]5,10]$ s'' è negativa quindi la funzione volge la concavità verso il basso in $t=5$ c'è un punto di flesso la cui ordinata è

$$sF = \left(t=5, -\frac{1}{3} \cdot t^3 + 5 \cdot t^2 + 5 \cdot t \right)$$

$$sF = \frac{325}{3}$$

(14)

Disegnamola



Per la funzione $s_2(t) = 2 \cdot t^2 + \frac{5}{3} \cdot t$ in $]10,30]$ non è necessario eseguire uno studio di funzione

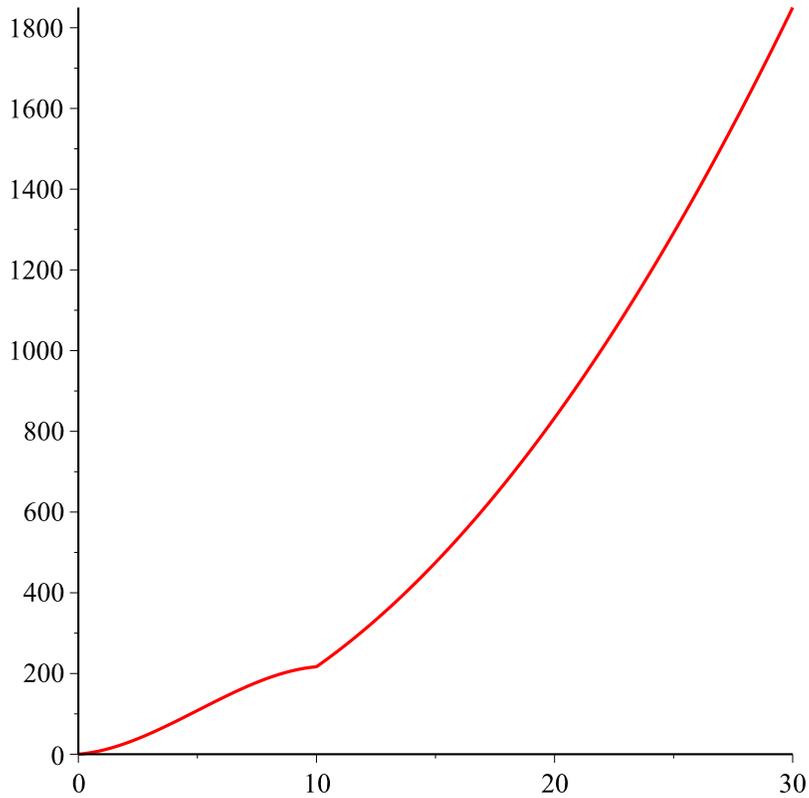
poichè si tratta di un arco di parabola (con asse parallelo all'asse s) con concavità verso l'alto passante per il punto I sopra determinato e G (30,1850).

$$s = \left(t=30, 2 \cdot t^2 + \frac{5}{3} \cdot t \right)$$

$$s = 1850$$

(15)

La legge oraria del primo meteorite ha quindi grafico:



Si osserva in particolare che la suddetta funzione è continua in $[0,30]$, come già verificato sopra.
La derivata prima di $h(t)$ è:

$$h'(t) = \begin{cases} -t^2 + 10t + 5 & 0 \leq t < 10 \\ 4 \cdot t + \frac{5}{3} & 10 < t \leq 30 \end{cases}$$

In $t=10$ vi è un punto di non derivabilità (punto angoloso) poichè le derivate destra e sinistra sono diverse e finite.

$$\lim_{t \rightarrow 10^-} (-t^2 + 10 \cdot t + 5)$$

5

(16)

$$\lim_{t \rightarrow 10^+} \left(4 \cdot t + \frac{5}{3} \right)$$

$\frac{125}{3}$

(17)

altrove la funzione è derivabile.