Eine Weltraummission

Im Jahr 2200 kann das modernste vom Menschen gebaute Raumschiff eine Geschwindigkeit von 75% der Vakuumlichtgeschwindigkeit erreichen. Du wirst Teil der Besatzung einer Mission sein, die einen Planeten, der um den Stern Sirius kreist, erreichen soll. Sirius ist 8,61 Lichtjahre von der Erde entfernt und nähert sich unserem Sonnensystem mit einer Geschwindigkeit von 7,63 km/s. Auf dem Planet angekommen, soll die Besatzung dort 2,00 Jahre verschiedene Experimente durchführen und dann zur Erde zurückkehren. Du sollst zur Organisation dieser Reise beitragen, um beispielsweise die benötigte Menge an Nahrung zu bestimmen. Nimm als Referenzzeitpunkt $t=0$ den Zeitpunkt des Starts von der Erde; auch kannst Du annehmen, dass die gesamte Reise mit maximaler Fluggeschwindigkeit stattfindet und damit sämtliche Effekte, die durch die Beschleunigungsphasen auftreten, vernachlässigt werden können.
Du kannst noch zusätzliche Annahmen treffen, um folgende Fragen zu beantworten:

1. **Wieviel Zeit vergeht für einen Beobachter auf der Erde, bis die Mission zurückkehrt?**
2. **Wieviel Zeit vergeht für das Equipment (Ausstattung) während des Hinflugs bzw. des Rückflugs?**
3. **Wieviel Zeit vergeht für das Equipment, bis die Mission zur Erde zurückkehrt?**

   Auf der Erde haben unterdessen einige Tests an der im Raumschiff verwendeten Elektronik gezeigt, dass Instandhaltungsarbeiten durchgeführt werden müssen. Nach einem Jahr (auf der Erde) wird also ein Signal zum Raumschiff gesendet.

4. **Wieviel Zeit vergeht für den Kapitän des Raumschiffs, bis ihn das Signal erreicht?**

   Als er das Signal empfängt, sendet der Kapitän sofort eine Bestätigung an die Erde zurück.

5. **Wie lang nach dem Aussenden des Signals an das Raumschiff kommt diese Bestätigung auf der Erde an?**

   Mit Fortdauer der Hinreise und damit größeren Distanzen werden die Verzögerungen in der Kommunikation mit der Erde immer größer; um dies der Öffentlichkeit zu erklären,

6. **Zeichne in ein kartesisches Koordinatensystem die Kurven für den Abstand des Raumschiffs von Erde sowie die beiden Kommunikationssignale in Abhängigkeit von der Zeit ein.**

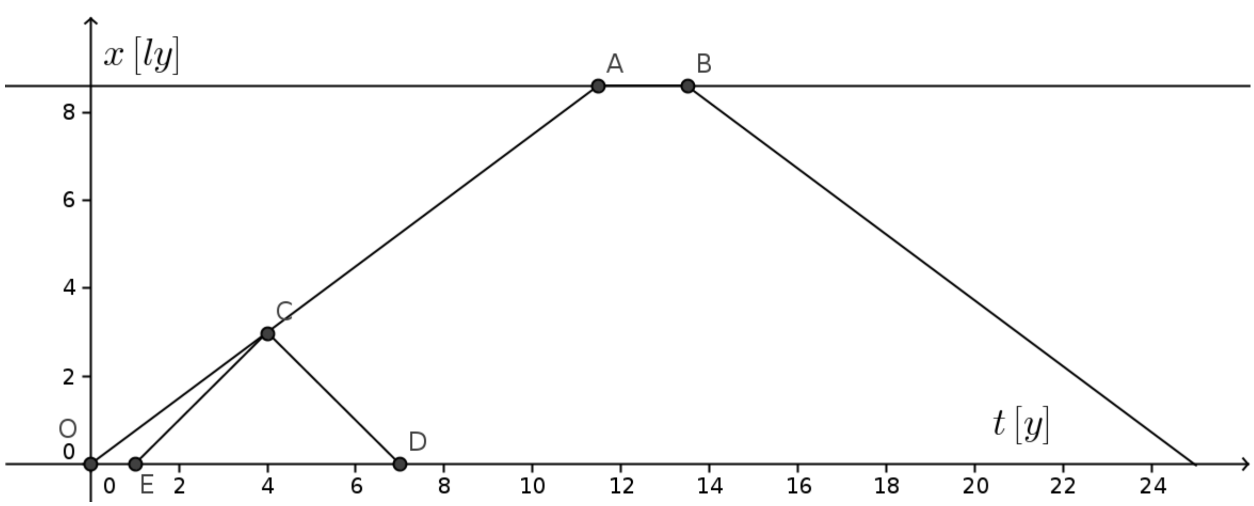
   Der Verantwortliche für die Sicherheit der Raummission teilt Dir eine Sorge mit: er befürchtet, dass aufgrund der relativistischen Längenkontraktion das Symbol der Erdenflotte für die Grenzwachen nicht erkennbar sei und dass diese einen falschen Alarm auslösen könnten.

7. **Ist dies eine begründete Sorge? Erläutere Deine Überlegungen in Hinsicht auf diese Befürchtungen. Stelle auch quantitative Überlegungen an, um eine Lösung für dieses Problem zu finden.**

Lösung: eine Weltraummission

Notation: Wir bezeichnen die Zeit und Zeitintervalle im Ruhesystem (Erde) mit t und Δt, während gestrichene Größen im bewegten System gemessen werden: t' und $\Delta t'$. Jahre bzw. Lichtjahre werden mit y und ly bezeichnet.

1. Die Reise besteht aus drei Phasen: eine Hinfahrt der Dauer Δt_H, der Aufenthalt auf Sirius der Dauer Δt_A und der Rückreise der Dauer Δt_R. Für einen Beobachter auf der Erde ergibt sich $\Delta t_H = \frac{8{,}61 ly}{0{,}75c} = 11,48y$. $\Delta t_A = 2y = \Delta t'_A$, da die Geschwindigkeit von Sirius im Vergleich zu c vernachlässigbar ist: $\frac{v}{c} = 2,5 \times 10^{-5}$bzw. $\gamma_{Sirius} \approx 1 + \frac{1}{2}\left(2,5 \times 10^{-5}\right)^2 = 1 + 3,125 \times 10^{-10}$. Die Rückreise dauert gleich lang wie die Hinfahrt, woraus folgt:
$$\Delta t_{Gesamt} = 2 \cdot 11,48y + 2y \approx 25y.$$
2. Auch im bewegten Bezugssystem dauern Hin- und Rückfahrt gleich lange, allerdings ist diese Zeitspanne um den Lorentzfaktor verkürzt:
$$\Delta t'_A = \frac{\Delta t_A}{\gamma} = \Delta t_A \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 7,59y = \Delta t'_R.$$
3. Insgesamt dauert die Mission also aus Sicht des bewegten Beobachters also
$$\Delta t'_{Gesamt} = 2 \cdot 7,59y + 2y \approx 17,19y.$$
4. Das Signal wird von der Erde zum Zeitpunkt $t_0 = 1y$ und vom Ort $x_0 = 0$ ausgesandt. Nach den Lorentztransformationen findet man
$$\begin{aligned} x'_0 &= \gamma\,(x_0 - vt_0) = -1,13ly \text{ und} \\ t'_0 &= \gamma\left(t_0 - \frac{vx_0}{c^2}\right) = 1,512y. \end{aligned}$$
Das Signal benötigt also, im bewegten System gemessen, eine Zeit von
$$\Delta t'_1 = \frac{|x'_0|}{c} = 1,13y,$$
weshalb das Signal das Raumschiff zum Zeitpunkt $t'_{Signal} = t'_0 + \Delta t'_1 = 2,65y$ erreichen wird.
5. Im Ruhesystem der Erde erreicht das Signal das Raumschiff nach der Zeit t_{signal}, welche aus dem Schnittpunkt der Graphen des Raumschiffs und dem Signal erhalten werden kann:
$$c \cdot (t_{signal} - t_0) = v \cdot t_{signal} \Rightarrow t_{signal} = \frac{c}{c-v} \cdot t_0 = 4y$$
Zu diesem Zeitpunkt ist das Raumschiff $3ly$ von der Erde entfernt, die Bestätigung benötigt also noch drei Jahre, um wieder auf der Erde anzukommen. Insgesamt kommt die Bestätigung also sechs Jahre nach dem Aussenden des Signals auf der Erde an.
Natürlich kann man den Zeitpunkt t_{signal} auch aus der Umkehrung der Lorentztransformationen erhalten: $t_{signal} = \gamma \cdot t'_{signal}$.
6. Nachfolgendes Orts Zeit Diagramm zeigt die gesamte Situation:



NB: Von den Schülern wurde nur die Darstellung bis ca. 7y-8y verlangt.
Zur Erklärung: Die Strecke OA stellt die Distanz des Raumschiffs von der Erde dar, EC ist das von der Erde ausgesandte Signal, CD die Bestätigung.

7. Die Befürchtung des Sicherheitsbeauftragten ist durchaus gerechtfertigt; Die Lorentzkontraktion tritt nur entlang der Bewegungsrichtung auf und deswegen würde ein auf der Seite des Schiffes angebrachter Kreis zu einer Ellipse verzerrt, deren eine Halbachse in Bewegungsrichtung zur andern um $\gamma = 1,512$ verkürzt ist. Daraus erhält man eine Exzentrizität von $\varepsilon = \sqrt{1 - v^2/c^2} = 0,75$. Um eine Verzerrung des Symbols zu verhindern, muss das Symbol an der Front des Raumschiffs angebracht werden.