

Übersetzung von:

Esame di stato di Liceo Scientifico

Indirizzo: Scientifico - Progetto "Brocca"

Prüfung aus: Physik und Laboratorium

Schuljahr 2000, ordentliche Session

In der ersten Hälfte des 20. Jhr., nach der Entdeckung dass elektromagnetische Strahlung Wellen- und Teilcheneigenschaft besitzt, wurde die Hypothese aufgestellt, dass auch Materie Welleneigenschaften besitzen könnte.

1. Es soll die Bedeutung der Aussage "*die elektromagnetische Welle hat Teilchen- und Welleneigenschaften*" erklärt und ein Experiment, welches die Teilcheneigenschaften der elektromagnetischen Welle bestätigt hat, beschrieben werden.
2. Es soll die Bedeutung der Aussage "*es wurde die Hypothese formuliert, dass Materie Welleneigenschaft besitzt*" erklärt und ein Experiment, welches die Gültigkeit dieser Hypothese bestätigt, beschrieben werden.
3. Zu berechnen ist die Photonenzahl, die eine Radiostation mit 20 kW Sendeleistung bei einer Frequenz von 99 MHz emittiert.
4. Zu berechnen ist die Wellenlänge die einem Elektron zuzuordnen ist, welches bei anfangs vernachlässigbarer Geschwindigkeit vom Feld zweier Elektroden mit dem Potentialunterschied 200 V beschleunigt wird.
5. Zu berechnen ist die minimale kinetische Energie, die ein Elektron haben kann, wenn es sich nur in eine Richtung in einem $0,1\text{ nm}$ breiten Bereich bewegen kann.

Elektronladung	$e = -1,602 \cdot 10^{-19}\text{ C}$
Masse des Elektrons	$m = 9,11 \cdot 10^{-31}\text{ kg}$
Lichtgeschwindigkeit	$c = 3,00 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
Plancksches Wirkungsquantum	$h = 6,63 \cdot 10^{-34}\text{ J} \cdot \text{s}$

Lösung

1. Der Welle-Teilchen-Dualismus der elektromagnetischen Strahlung beschreibt, dass die Strahlung, in Abhängigkeit der Art der Beobachtung, Wellen- oder Teilchenphänomene zeigt, bzw. dass die Phänomene nur unter Berücksichtigung beider Phänomene erklärbar sind. So zeigten sich zum Beispiel die Welleneigenschaften der elektromagnetischen Strahlung in Beugungs- und Interferenzphänomenen, die erstmals durch Young durchgeführt wurden: Licht, welches auf einen Doppelspalt mit Spaltabständen in der Größenordnung der Wellenlänge trifft, wird von diesem so *gebeugt*, dass das auf einem Schirm beobachtbare Interferenzmuster mit abwechselnden Hell-Dunkel-Streifen nicht durch ein Teilchenmodell beschrieben werden kann, bei welchem hingegen zwei helle Bereiche, die durch einen etwas weniger stark ausgeleuchteten Bereich (aber eben nicht vollkommen dunklen Bereich) getrennt sind, zu erwarten wären.

Phänomene, welche die Teilcheneigenschaft zeigen, sind der fotoelektrische Effekt (erklärt durch Einstein, 1905) und der Comptoneffekt (1923).

Der Fotoeffekt beschreibt die Auslösung von Elektronen aus einem Metall durch Bestrahlung mit elektromagnetischer Strahlung.

Der Comptoneffekt beschreibt die Streuung elektromagnetischer Strahlung an Elektronen mit einer damit verbundenen Streuwinkelabhängigen Frequenzänderung der Strahlung.

Beide Experimente können nicht mit Hilfe des Wellenmodells für elektromagnetische Strahlung, sondern nur mit Hilfe eines Teilchenmodells von Teilchen mit quantisierter Energie und quantisiertem Impuls erklärt werden:

$$\text{Photonenenergie} \quad E_{\text{Photon}} = h \cdot \nu \quad \text{und} \quad \text{Photonenimpuls} \quad p_{\text{Photon}} = \frac{E_{\text{Photon}}}{c} = \frac{h \cdot \nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

Betreffend des **Welle-Teilchen-Dualismus** sei auf das von *Bohr* aufgestellte *Komplementaritätsprinzip* (1927) verwiesen. Nach Bohr ist es nicht Aufgabe der Physik die Natur selbst zu erklären, sondern nur die von ihr beobachtbaren Phänomene. Es macht somit keinen Sinn nach der *wahren Natur des Lichts* zu fragen, sondern sinnvoll ist eine Erklärung der Phänomene, welche in Abhängigkeit der im Experiment gewählten Messung/Beobachtung mit Hilfe des Teilchen- oder des Wellenmodells erfolgt. Diese Wellen- und Teilcheneigenschaften sind in dem Sinne komplementär, dass es nicht möglich ist, sie gleichzeitig zu beobachten.

Diese Interpretation wurde nicht von allen Physikern, welche zur Entwicklung der Quantenphysik beigetragen haben, geteilt, bzw. sie wurde später von vielen auch als unnötig angesehen. Einstein z.B. vertrat die Meinung, dass die Teilcheneigenschaften ausschließlich unter mikroskopischen Gesichtspunkten eine Rolle spielen, unter makroskopischen Aspekten aber, was einer räumlich-zeitlichen-Mittelung entspricht, die Welleneigenschaften auftreten.

2. Die Hypothese, dass auch Materie Welleneigenschaften besitzt, wurde von De Broglie 1923 aufgrund einer Idee für die Gleichartigkeit von Strahlung und Materie formuliert: So wie die elektromagnetische Strahlung Aspekte eines Teilchenmodells besitzt, so kann angenommen werden, dass mit einem Materie-Teilchen der Masse m und der Geschwindigkeit v (also mit dem *klassischen* Impuls $p = m \cdot v$), die Wellenlänge

$$\lambda_{\text{Teilchen}} = \frac{h}{p_{\text{Teilchen}}}$$

verknüpft ist. Hervorzuheben ist, dass die Wellenlänge nicht nur von der Ruhemasse abhängt, sondern auch von der Geschwindigkeit des Teilchens. Je schneller dieses ist, umso kürzer ist seine Wellenlänge.

Dieses physikalische Modell ermöglichte die Erklärung der von Bohr postulierten diskreten Elektronenschalen für Atomelektronen (und der Energieniveaus) und zwar anschaulich in der Art, dass dem Schalen-elektron eine "stehende Welle" entlang einer Kreisbahn um den Kern in Abhängigkeit des Orbitalradius zugeordnet ist.

$$2 \cdot \pi \cdot r = n \cdot \lambda = n \cdot \frac{h}{m \cdot v} \quad \Rightarrow \quad m \cdot v \cdot r = n \cdot \frac{h}{2 \cdot \pi} = n \cdot \hbar \quad n \in \mathbb{N}$$

Ab 1925 konnten diese stationären Lösungen mit Hilfe der *Schrödingergleichung* (der Wellengleichung der Quantenphysik) bestätigt werden. Eine experimentelle Bestätigung der Welleneigenschaften von Elektronen erfolgte 1927 durch *Davisson* und *Gerner*: Sie schickten einen Elektronenstrahl niedriger Energie (ca. 50 eV) auf ein Kristallgitter und waren damit in der Lage dasselbe Interferenzmuster wie bei einer Röntgenbeugung zu erhalten. Die zugehörige Elektronen-Wellenlänge ergibt sich mit der De Broglie-Beziehung:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2 \cdot m_e \cdot E_{\text{kin}}}} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}{\sqrt{2 \cdot 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 50 \text{ eV} \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \frac{\text{C}}{\text{e}}}} = 1,73 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

Die nicht-relativistische Berechnung ist durch die im Vergleich zur Ruheenergie des Elektrons geringe kinetische Energie begründet ($E_{kin} = m_e \cdot c^2 = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot (3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2 = 8,2 \cdot 10^{-14} \text{ J} = \frac{8,2 \cdot 10^{-14} \text{ C} \cdot \text{V}}{1,602 \cdot 10^{-19} \frac{\text{C}}{\text{e}}} = 511,8 \text{ keV}$, $E_{kin}/E_0 \approx 10^4$).

3. Die in einer Minute abgestrahlte Energie beträgt:

$E_g = P \cdot \Delta t$ Diese Energie wird mit N -Photonen der Energie E_{Photon} übertragen

$$E_g = N \cdot E_{Photon} \quad \Rightarrow \quad N = \frac{E_g}{E_{Photon}} = \frac{P \cdot \Delta t}{h \cdot \nu} = \frac{2 \cdot 10^4 \text{ W} \cdot 60 \text{ s}}{6,62 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \cdot 99 \cdot 10^6 \frac{1}{\text{s}}} = 1,83 \cdot 10^{31}$$

4. Ein Elektron welches von einer elektrischen Spannung/Potentialdifferenz von 200 V beschleunigt wird hat anschließend die kinetische Energie

$$E_{kin} = q \cdot U = 200 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 200 \text{ V} = 3,204 \cdot 10^{-17} \text{ C} \cdot \text{V} = 3,204 \cdot 10^{-17} \text{ J}$$

Bei 200 V Beschleunigungsspannung für Elektronen ist eine nichtrelativistische Geschwindigkeitsberechnung ausreichend genau.

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot E_{kin}}{m_e}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,63 \cdot 10^{34} \text{ Js}}{9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}}} = 8,4 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Als Materiewellenlänge nach *De Broglie* ergibt sich dann:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m \cdot v} \approx \frac{h}{m_e \cdot v} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}{9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 8,4 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 8,68 \cdot 10^{-11} \text{ m}$$

Zum Vergleich: Eine relativistische Berechnung ergibt gleiche Werte (relativistische Masse $m = m_e \cdot (\gamma - 1)$):

$$m \cdot c^2 = m_e \cdot c^2 + E_{kin} \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{E_{kin}}{m_e \cdot c^2} + 1 = \frac{3,204 \cdot 10^{-17} \text{ J}}{9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot (3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2} + 1 = 1,000391$$

Damit folgt für die Relativgeschwindigkeit β und die Geschwindigkeit v :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \Rightarrow \quad \beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = 0,0279 \quad \Rightarrow \quad v = \beta \cdot c = 0,0279 \cdot 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 8,4 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

5. Die dem "eingesperrten" Elektron zuzuordnende *Materiewelle* (und der damit verbundenen kinetischen Energie) muss an den *Rändern* Schwingungsknoten aufweisen. Dies ergibt sich während der Lösung der Schrödingergleichungen, bei welcher die "scharfen Ränder" in den Potentialterm eingehen. Auf die ausführliche Lösung kann hier nicht eingegangen werden. Die geringste kinetische Energie besitzt das Elektron bei der größtmöglichen Wellenlänge. Dies ist die sogenannte Grundschiwingung, bei der in den verfügbaren Raum eine halbe Periode "passt".

$$L = \frac{\lambda}{2} \quad \Rightarrow \quad \lambda = 2 \cdot L \quad \text{somit folgt} \quad p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2 \cdot L} = \frac{6,63 \cdot 10^{34} \text{ Js}}{2 \cdot 0,1 \cdot 10^{-9} \text{ m}} = 3,315 \cdot 10^{-24} \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Mit dem Impuls kann man die Geschwindigkeit berechnen (Berechnung relativistisch):

$$p = m \cdot v = m_e \cdot \gamma \cdot v = m_e \cdot \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{1}{\sqrt{\frac{m_e^2}{p^2} + \frac{1}{c^2}}} = 3,64 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Die Geschwindigkeit ist viel kleiner als die Lichtgeschwindigkeit, somit kann die kinetische Energie nicht-relativistisch berechnet werden:

$$E_{kin} = \frac{p^2}{2 \cdot m_e} = \frac{(3,315 \cdot 10^{-24} \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}})^2}{2 \cdot 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}} = 6,03 \cdot 10^{-18} \text{ J} = \frac{6,03 \cdot 10^{-18} \text{ C} \cdot \text{V}}{1,602 \cdot 10^{-19} \frac{\text{C}}{\text{e}}} = 37,65 \text{ eV}$$

Ergänzung: Für den Lorentzfaktor γ und die relativistische berechnet E_{kin} ergeben sich die folgende Werte:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 1,0000735 \quad E_{kin} = m_e \cdot (\gamma - 1) = 6,032 \cdot 10^{-18} \text{ J} = \frac{6,032 \cdot 10^{-18} \text{ C} \cdot \text{V}}{1,602 \cdot 10^{-19} \frac{\text{C}}{\text{e}}} = 37,653 \text{ eV}$$

Man erkennt somit, dass eine nicht-relativistische Berechnung sehr gute Werte liefert.