Quando la forma è sostanza, alcuni assaggi di geometria.

Marco Andreatta
Professore di Geometria, Facoltà di Scienze di Trento
homepage : http://www.science.unitn.it/ andreatt/
e-mail: marco.andreatta@unitn.it

Queste pagine contengono il testo della conferenza, tenuta a Bolzano il 20 aprile 2012 e diretta a studenti delle scuole superiori. E' dunque una semplice raccolta di spunti per una conversazione; sono stati inseriti più temi di quelli effettivamente trattati.

1 Le origini

Geometria è una parola che viene dal greco $\gamma\epsilon\omega\mu\epsilon\tau\rho\iota\alpha$ e significa misura della terra.
La geometria è una disciplina scientifica-filosofica che sta alla base della nostra cultura. Si fonda su un metodo logico deduttivo, formalizzato sin dall'antichità da Talete, Pitagora, Euclide e tanti altri, ispirato dall'intuizione ed in generale dalla fantasia della mente umana. Gli elementi di Euclide è uno dei libri più letti nella storia dell' umanità.
Nei dialoghi di Platone (Atene 427-347 a.C.) troviamo un continuo richiamo alla geometria e al suo argomentare.

Sulla porta di ingresso dell Accademia, si dice, egli fece scrivere:

'Αγεωμέτρητος μηδεὶς εἰσίτω
ΑΓΕΩΜΕΤΡΗΤΟΣ ΜΗΔΕΙΣ ΕΙΣΙΤΩ

Agheomètretos medeìs eisìto

Nessuno entri che non conosca la geometria.

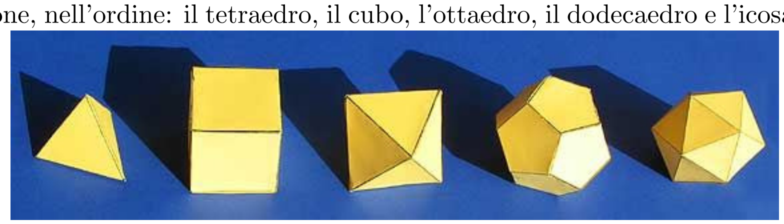
La frase ha giocato un grande ruolo nella cultura moderna: Nicolò Copernico la usò come motto nel frontespizio del *De rivolutionibus orbium caelestium*, l' American Mathematical Society la ha messa nel suo logo, ...

1.1 Solidi regolari

Nel Timeo (360 a.c) Platone descrive e utilizza per l'interpretazione della realtà dei particolari modelli geometrici, i **solidi regolari**, detti anche solidi platonici. Un solido regolare è un sottoinsieme dello spazio, convesso e limitato, non contenuto in un piano, delimitato da un numero finito di facce tali che :

- due facce diverse, se si incontrano, hanno in comune un vertice o un intero lato
- in ogni vertice concorre lo stesso numero di facce
- tutte le facce sono uguali ad un dato poligono regolare.

I matematici greci hanno classificato i solidi regolari, dimostrando il seguente teorema; la associazione con gli elementi "base" della natura e' stata fatta da Platone nel Timeo.
Teorema I solidi regolari sono solo cinque, come raffiguarto nella seguente illustrazione, nell'ordine: il tetraedro, il cubo, l'ottaedro, il dodecaedro e l'icosaedro.



Fuoco, Terra, Aria, Universo, Acqua

La dimostrazione di questo Teorema segue dalle ipotesi con alcune semplici deduzioni logiche. Dapprima si osserva che in un vertice debbono concorrere almeno tre facce, altrimenti il solido sarebbe contenuto in un piano. In un vertice possono concorrere $3, 4, 5$ triangoli equilateri, non di più. Se infatti in un vertice concorressero 6 triangoli equilateri la somma dei loro angoli al vertice darebbe 360 gradi, dunque il solido sarebbe contenuto in un piano. Più di 6 triangoli non possono concorrere, non ci stanno proprio! Similmente si deduce che in un vertice possono concorrere solo 3 quadrati e solo 3 pentagoni. 3 poligoni regolari con più di cinque lati non possomo concorrere in un vertice! Quanto sopra esaurisce tutte le possibilità. Verificare che il tetraedro è l'unico solido regolare ai cui vertici concorrono tre triangoli, e similmente per gli altri solidi regolari, richiede qualche ulteriore osservazione che tralasciamo per brevità. (Un modo è attraverso la bella formula di Eulero che collega il numero di vertici (v), di spigoli (s) e di facce (f) in un solido convesso: v-s+f = 2).

1.2 Costruzione di un solido con la "divina proporzione"

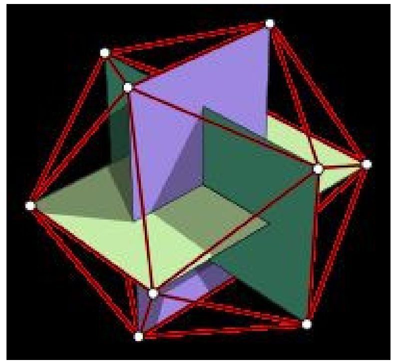
Vorrei soffermarmi un momento sulla *esistenza* di questi solidi. I greci avevano dato delle descrizioni esplicite per la loro "costruzione", con l'eccezione dell'icosaedro. Negli elementi di Euclide la costruzione di quest' ultimo è posta come problema aperto.

Una stupenda e rigorosa costruzione dell'icosaedro viene data da Luca Pacioli (San Sepolcro 1445 - Firenze1517); i suoi scritti sono per altro accompagnati da bellissime illustrazioni di tutti i solidi platonici fatte dall' amico Leonardo da Vinci.

La costruzione dell'icosaedro di Luca Pacioli è la seguente.

Si prendano tre rettangolo aurei uguali tra loro. Ricordiamo che un rettangolo aureo è un rettangolo tale che, se gli si toglie il quadrato formato dal lato corto, il rettangolo rimanente è simile a quello di partenza. Si verifica, con una semplice proporzione, che se il lato corto ha misura 1 il lato lungo deve aver misura $1 + \sqrt{5}/2$. Quest'ultimo numero è stato definito da fra Pacioli come "divina proporzione".

Si dispongano i 3 rettangoli "aurei" tra loro "ortogonalmente" come in figura; Si colleghino quindi con spigoli tutti i vertici e si ottiene un icosaedro.



I solidi platonici hanno affascinato ed ispirato parecchi artisti, tra gli altri il sopracitato Leonardo, e Salvador Dalì, del quale riportiamo un quadro che rappresenta l'ultima cena all'interno di un dodecaedro.

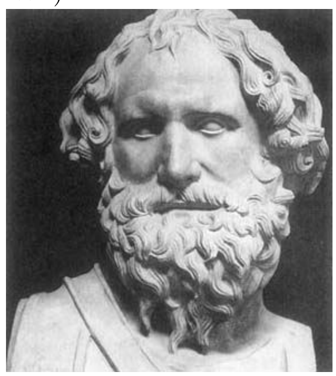
Per concludere questa parte osserviamo come i solidi platonici riappaiono costantemente in matematica: in tempi moderni a loro si riconducono le classificazioni dei gruppi di Lie semplici (o teoria delle simmetrie), la classificazione delle singolarità (o teoria delle catastrofi) in due variabili.

2 Sulla geometria della sfera

2.1 Archimede

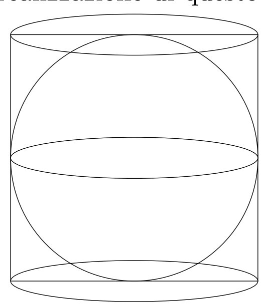
I matematici greci avevano scoperto che l'area di un cerchio è proporzionale al raggio al quadrato, i.e. $A = \pi r^2$; la costante di proporzionalità, essendo quindi l'area del cerchio unitario, viene indicata con la lettera greca π e denominata p-greco.
Uno si spinse molto più in là: Archimede (Siracusa 287-212 a.C.) calcolò con la maggior precisione dell'epoca il valore di π, riuscendo a determinare con esattezza le prime 9 cifre dopo la virgola della sua scrittura decimale :$3,141592653$ (π non e' un numero razionale, ovvero non si può scrivere come quoziente di

due interi, ed è un numero trascendente (ovvero non è nemmeno radice di un polinomio a coefficienti interi).



Ma il risultato per cui Archimede andava più fiero era il seguente (si dice abbia chiesto di far scolpire sulla sua tomba la figura della sfera e del cilindro circoscritto e che Cicerone abbia dato testimonianza della realizzazione di questo fatto).

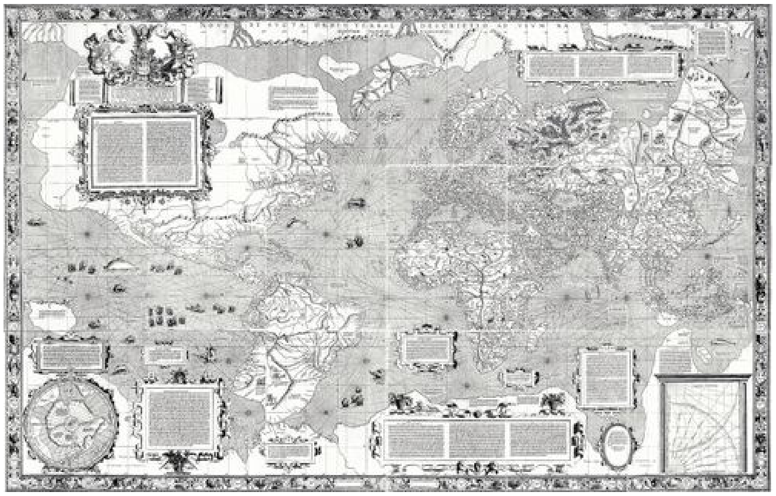
Teorema La superficie della sfera di raggio r è uguale alla superficie laterale del cilindro circoscritto:
$2\pi r \times 2r = 4\pi r^2$

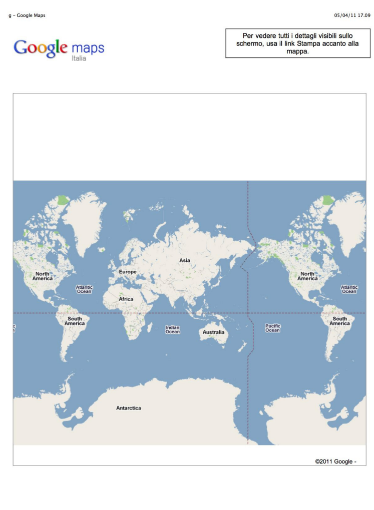


Il problema anche in questo caso era determinare il fattore di proporzionalità davanti a r^2 , i.e. 4π. Per farlo Archimede dimostrò che proiettando la sfera dal diametro verticale sul cilindro circoscritto, con una proiezione orizzontale, l'area viene preservata. Questa dimostrazione, non difficile, ma nemmeno ovvia, di solito viene fatta nelle scuole superiori. Venne "persa o dimenticata" dopo la morte di Archimede e riscoperta molti secoli dopo da Galileo. Nel capitolo successivo vorrei parlare di un'altra proiezione della sfera sul cilindro, anch' essa molto utile.

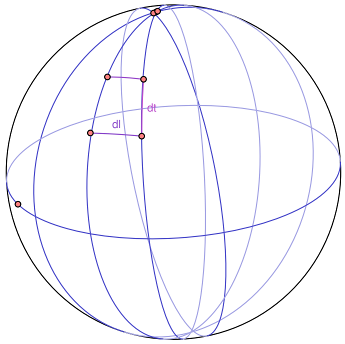
2.2 Proiezione conforme di Mercatore

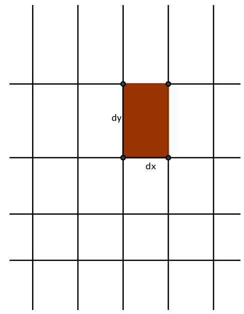
Un matematico, di mestiere mercante e cartografo, l' olandese Gerard de Cremer (Mercatore) (1512 -94) ideò un bellissimo modo per proiettare la sfera dal suo centro sul cilindro circoscritto (che poi viene aperto e "spianato"). La sua proiezione ha dato origine alla cartografia moderna. Delle due immagini successive la prima e' quella di una proiezione di Mercatore della fine del '500, la seconda contiene due proiezioni di Mercatore estratte da Google Earth.





Mercatore ebbe l'idea di proiettare sul cilindro circoscritto dal centro della sfera in modo da conservare la "forma" delle terre emerse. Per questo richiese che la proiezione rispettasse le proporzioni tra i lati di un rettangolo con due lati paralleli all'equatore e due lungo i meridiani, come in figura, e quelli della sua proiezione.

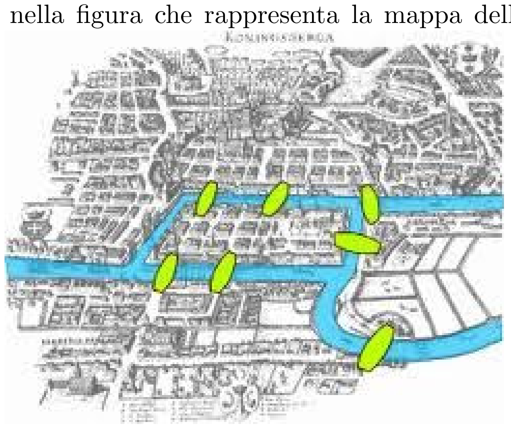




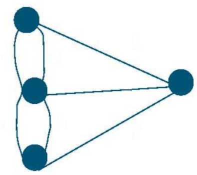
Impose quindi la condizione $dy/dt = dx/dl$. Si verifica facilmente che $dx/dl = 1/cos(t)$. Da questo, integrando, si ricava la *formula* di Mercatore $y = ln(tan(t) + 1/cos(t))$, che definisce la ascissa y della proiezione in termini della coordinata t, i.e. della latitudine sulla sfera (la coordinate x e' invece costante mente uguale alla longitudine).
Questa proiezione che conserva le proporzione dei lati dei triangoli conserva quindi anche gli angoli; per questo divenne subito la carta geografica ideale per la navigazione terrestre.

2.3 Topologia

Prima di parlare di un famoso problema legato alla sfera (in più) dimensioni, vorrei introdurre la teoria geometrica detta Topologia. Per farlo parlerò del problema dei Ponti di Königsberg. Questo importante centro politico e culturale della Germania, dove abitava tra l'altro Emanuel Kant, è attraversato da un fiume, che, dividendosi, forma delle isole, sopra il quale furono costruiti 7 ponti, come nella figura che rappresenta la mappa della città nel 1652.



Il problema di viabilità che si ponevano i cittadini all'epoca era il seguente: trovare un percorso (non necessariamente chiuso) che passi da tutti i ponti della citta' una ed una sola volta. Problemi di viabilità simili e più complessi sono attualmente sul tavolo di molti comuni e vanno affrontati con la matematica. Nel 1735 Eulero dimostrò che questo specifico problema non ha soluzione. Dapprima semplificò la formulazione del problema "deformando" la terra ferma in punti (nodi) e i ponti in segmenti che li uniscono (spigoli o archi) come in figura



Questa semplificazione diete origine alla teoria dei grafi e alla topologia; quest'ultima è lo studio della geometria delle forme che si puo' ottenere con deformazioni senza "strappi", "sovrapposizioni" o "incollature".

Eulero osserva quindi che quando uno entra in un nodo attraverso un ponte ne deve quindi uscire (eccetto nel nodo finale). Dunque per poter percorrere i ponti una sola volta bisogna che nel nodo arrivino un numero pari di ponti; questo numero si chiama grado del nodo.

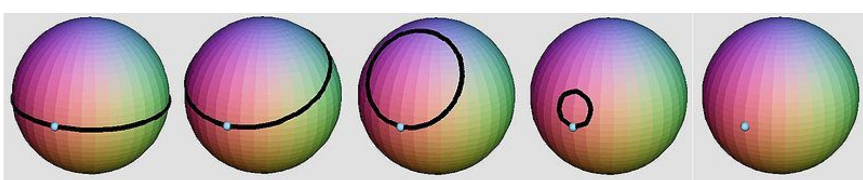
Eulero, con questa osservazione, ha dimostrato il seguente

Teorema Un qualsiasi grafo è percorribile solo se (condizione necessaria) esso ha tutti i nodi di grado pari, o due di essi sono di grado dispari.

Più tardi è stato dimostrato che la condizione è anche sufficiente e che per percorrere un grafo "possibile" con due nodi di grado dispari, è necessario partire da uno di essi, e si terminerà sull' altro nodo dispari.

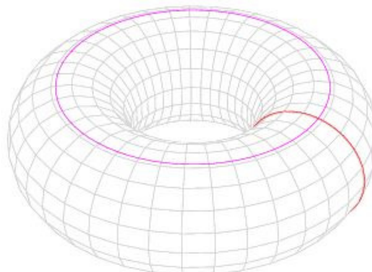
2.4 la congettura di Poincaré: un premio da un milione di dollari.

La sfera è semplicemente connessa, ovvero ogni cammino chiuso puo' essere "deformato" ad un punto senza dover essere strappato (dunque topologicamente).



Poincaré osservò che la sfera, a meno di deformazioni topologiche, è l' unica superficie chiusa (ovvero compatta e senza bordi) semplicemente connessa.

La figura seguente rappresenta la ciambella con un buco (il Toro) e mostra due cammini chiusi che non possono essere deformati ad un punto.



Poincaré ha congetturato che questo vale per le sfere di dimensione tre. Questo è uno dei sette problemi scelti dalla fondazione americana Clay come problemi matematici del nuovo millennio; per la soluzione di ciascun problema la fondazione offre un premio di un milione di euro.
Grigorij Perelman, Leningrado, 13 giugno 1966, ha dimostrato la Congettura di Poincaré nel 2002; nel 2010 la fondazione Clay gli ha assegnato il premio.

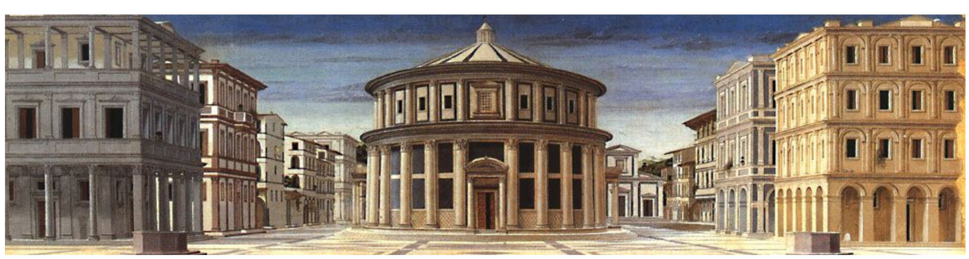
Concludo questo capitolo con l'immagine di un bancone da bar progettato dall' architetto Zaha Hadida, Baghdad, 31 ottobre 1950; laureata in matematica, si ispira alla Topologia nelle sue creazioni.

3 La geometria Proiettiva

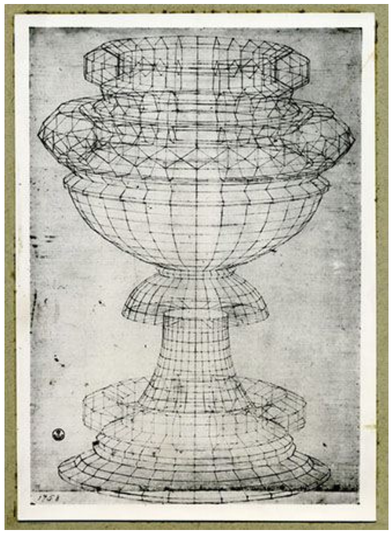
Se la pazienza ed il tempo del lettore lo consentono vorrei proseguire con un altro argomento che mi sta molto a cuore: la geometria proiettiva. Disciplina nata qualche tempo fa per opera di illustri artisti italiani, è ancor oggi una delle aree più attive nella ricerca matematica con una scuola italiana di gran valore. E' il mio settore di ricerca principale.

L' idea di realizzare un disegno prospettico, ovvero di proiettare lo spazio su un piano (foglio), nasce nel Rinascimento per opera di artisti italiani quali ad esempio Paolo Uccello, Pratovecchio1397-Firenze1475, e Piero della Francesca, Sansepolcro 1416-1492. Le successive immagini raffigurano a battaglia di San Romano, di Paolo Uccello

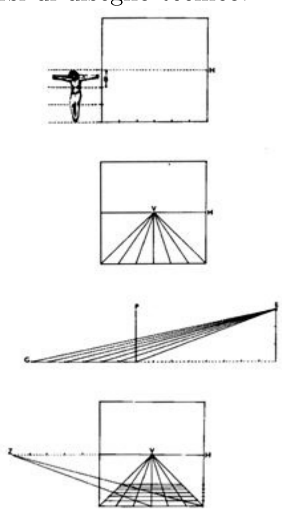
la Città ideale di Piero della Francesca



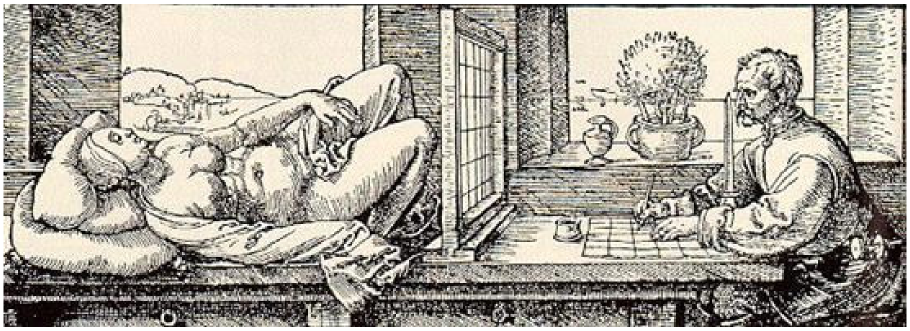
e lo studio di un calice attribuito o a Piero o a Paolo.



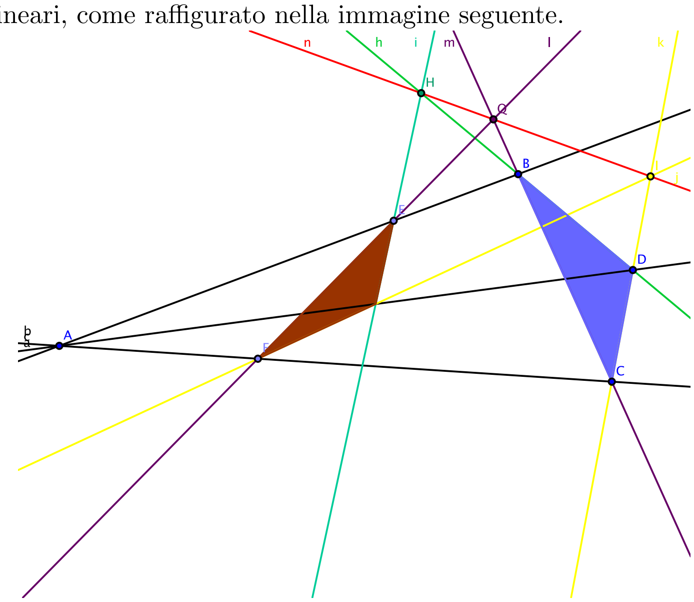
Un primo trattato teorico sul disegno prospettico è di Leon Battista Alberti, Genova 1404- Roma 1472, De Pictura; fu scritto nel 1435 in latino e poi nel 1436 in volgare. La figura seguente riporta alcune figure del libro con le "regole" insegnate ancor oggi nei corsi di disegno tecnico.



Pochi anni dopo il pittore tedesco Albrecht Dürer, Norimberga 1471-1528, scende più volte in Italia per apprendere le regole che stanno alla base della prospettiva, probabilmente le impara da Fra Pacioli. Scrive quindi quello che viene considerato il primo libro di scienza in lingua tedesca, *Unterweisung der Messung mit dem Zirkel und Richtscheit*. La figura seguente raffigura un disegno del Dürer che descrive la tecnica pittorica detta del Velo dell' Alberti.



E' al matematico francese Girard Desargues, Lione 1591-1661, che viene attribuita la nascita della geometria proiettiva come disciplina matematica astratta. A Desargues, che si occupa di prospettiva e di taglio di pietre (stereotomia), dimostra tra l'altro il seguente risultato.
Teorema Due triangoli in prospettiva hanno le intersersezioni dei lati corrispondenti colineari, come raffigurato nella immagine seguente.



La dimostrazione di questo teorema è abbastanza difficile, se si rimane nel piano della figura. Diventa semplice se cambiamo "punto di vista" (e sorvoliamo su alcuni aspetti formali): prendiamo la retta passante per i punti A e D e la solleviamo dal piano. I due triangoli diventano due triangoli nello spazio e ognuno di essi definisce un piano (tre punti non allineati nello spazio definiscono un piano). Questi due piani nello spazio si intersecano in una retta e su questa retta devono stare le intersezioni dei lati corrispondenti!

Come omaggio alla mia città ricordo il gesuita Andrea Pozzo, Trento 1642 - Vienna 1709, che ha applicato le tecniche di prospettiva all' architettura ed ha scritto su questo un importante trattato: *Perspectiva pictorum et architectorum*.

La figura seguente riproduce una ”cupola” disegnata dal Pozzo su un soffitto praticamente piatto nella chiesa di Mondoví.