

Variieren von Aufgaben: Eine Strategie für mathematisches Forschen

Schloss Rechtenthal, Tramin, 17./18.03.2011
Volker Ulm

1. Einführungsbeispiele

Eine bewährte Strategie, um neue (nicht nur) mathematische Erkenntnisse zu gewinnen, ist es, von Bekanntem auszugehen, dies zu variieren und zu prüfen, ob sich in der veränderten Situation interessante Dinge ergeben. Im Mathematikunterricht können etwa bekannte Sachverhalte oder herkömmliche Schulbuchaufgaben als Keime für eine Vielfalt von Variationen dienen. Sehen wir uns zunächst einige Beispiele an:

Initialaufgabe: Abstandsmenge

Zeichne alle Punkte, die von einer gegebenen Geraden den Abstand 2 cm haben.

Wir variieren die Aufgabenstellung:

- Zeichne alle Punkte, die von einer gegebenen *Strecke* den Abstand 2 cm haben.
- ... die von einem gegebenen *Punkt* den Abstand 2 cm haben.
- ... die von einem gegebenen *Kreis* den Abstand 2 cm haben.
- ... die von einem gegebenen *Quadrat* den Abstand 2 cm haben.
- ... die von einem gegebenen *Geradenpaar* den Abstand 2 cm haben.
- ... die von zwei gegebenen *Punkten* den Abstand 2 cm haben.
- ... die von zwei gegebenen *Punkten denselben Abstand* haben.
- ... die von zwei gegebenen *Geraden denselben Abstand* haben.
- ... die von zwei gegebenen *Strecken denselben Abstand* haben.
- Bestimme alle Geraden, die von zwei gegebenen Punkten denselben Abstand haben.
- Bestimme alle Geraden, die von drei gegebenen Punkten denselben Abstand haben.
- Bestimme alle Ebenen im Raum, die von zwei gegebenen Punkten denselben Abstand haben.
- Bestimme alle Kreise, die von zwei gegebenen Punkten denselben Abstand haben.
- Bestimme alle Punkte im Raum, die von einer gegebenen Geraden den Abstand 2 cm haben.
- Welches ist die Menge aller Punkte, die von einem Würfel den Abstand 2 cm haben?
- ...

Diese Liste an Variationen ließe sich noch lange fortsetzen. Die hier vorgeschlagenen Variationen sollen nur ein erstes Gefühl dafür geben, was Variieren bedeutet. Eigentlich ist es Sache des Bearbeiters einer Aufgabe, sich ausgehend vom angesprochenen Themenfeld eigenständig Fragestellungen zu überlegen.

Initialaufgabe: Summe von Zahlen

Addiere drei aufeinander folgende natürliche Zahlen. Was fällt dir auf?

Variationen:

- Addiere *vier* aufeinander folgende natürliche Zahlen. Was fällt dir auf?
- Addiere *fünf* aufeinander folgende natürliche Zahlen.
- Addiere *n* aufeinander folgende natürliche Zahlen.
- Addiere drei aufeinander folgende *gerade* Zahlen.

- e) Addiere drei aufeinander folgende *ganze* Zahlen.
- f) Addiere drei *gleichabständige* natürliche Zahlen.
- g) *Multipliziere* drei aufeinander folgende natürliche Zahlen.
- h) Addiere drei aufeinander folgende *rationale* Zahlen.
- i) ...

2. Was ist „Variieren von Aufgaben“?

Es geht jeweils darum, jeden der tragenden Begriffe bzw. der mathematischen Objekte einer bekannten Aussage oder einer vorgegebenen Aufgabe abzuändern. Hier sind mathematische Phantasie und mathematisches Vorwissen gleichermaßen gefragt!

Die Ideen sind zu ordnen, zu bewerten und auf ihre Machbarkeit hin zu untersuchen. Manche Variationen werden sich als nicht sinnvoll, falsch oder zu schwierig erweisen. Auf diese Weise ergeben sich selbst gestellte Probleme, die der ursprünglichen Aufgabe entwachsen sind und diese in vielfältige Richtungen weiterführen. Zum Lösen eines solchen Problembündels kann sich arbeitsteiliges Vorgehen anbieten. Einen sinnvollen Abschluss erhält eine Unterrichtseinheit dieser Art allerdings erst dann, wenn die Ergebnisse zusammenfassend dargestellt und gewertet und dabei exemplarisch Strategien mathematischen Arbeitens verdeutlicht werden.

Wenn man ein Problemfeld in dieser Weise von vielen verschiedenen Seiten beleuchtet und durchdringt, vielfältige Bezüge zum eigenen Vorwissen schafft, lernt man sicher mehr an mathematischem Denken und an kreativem Umgang mit Mathematik, als durch Abarbeiten voneinander isolierter, kurzschrittig formulierter Aufgabenstellungen.

3. Variationsstrategien

Wackeln: Geringfügig ändern

Ersetze in der Geradengleichung $y = 3x + 1$ einzelne Parameter durch andere Zahlenwerte.

Ersetzen: Analogisieren

Alle Dreiecke haben einen Umkreis. Gilt dies auch für alle Vierecke?

$3 + 4 = 4 + 3$. Gilt auch $3 - 4 = 4 - 3$?

Weglassen: Verallgemeinern

Vom Satz des Thales zum Umfangswinkelsatz.

Von der Gleichung $y = 3x - 5$ zur allgemeinen Geradengleichung $y = mx + t$.

Hinzufügen: Spezialisieren

Betrachte statt der allgemeinen quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ zunächst die Gleichung $x^2 + 4x + 4 = 0$. Dieses Verfahren unterstützt die Verknüpfung von Neuem mit Bekanntem.

Richtung wechseln: Umkehren

Bestimme die Nullstellen (das Maximum) einer quadratischen Funktion. Finde eine (mehrere) weitere quadratische Funktionen mit diesen Nullstellen (diesem Maximum).

Rahmen wechseln: Kontext ändern

Finde eine passende Situation zur Gleichung.

Welcher Graph beschreibt die Schilderung des Rennfahrers, Bergsteigers etc.?

Interessant machen: Anders bewerten

Autologos besitzen offensichtlich eine Reihe geometrischer Eigenschaften. Viele Fragen können diese einfachen Figuren interessant machen:

- Wie ist dieses Logo aufgebaut?
- Gibt es Symmetrien?
- Welchen Anteil an der Gesamtfläche haben die Teilflächen?
- Wie ist dieses Logo entstanden? ...

4. Möglicher Unterrichtsverlauf

H. Schupp empfiehlt für das konkrete Variieren im Unterricht folgende – idealtypisch zu verstehende – Schritte:

- Vorgabe der Einstiegsaufgabe,
- Lösen dieser Aufgabe, nach Möglichkeit auf mehreren Wegen.

Bis hierhin verläuft der Unterricht durchaus traditionell. Wird die Einstiegsaufgabe auf unterschiedlichen Lösungswegen bearbeitet, erhöht dies erfahrungsgemäß anschließend die Variationsbreite.

- Aufforderung zum Variieren,
- bewusst unkommentiertes Sammeln der Vorschläge.

In dieser Phase des „brain-stormings“ wird an der Einstiegsaufgabe „gewackelt“, die Ideen werden etwa an der Tafel gesammelt. Dabei hält sich die Lehrkraft mit Kommentaren und Bemerkungen zurück, lässt Schülerreaktionen aber natürlich zu, sofern sie nicht verletzend sind.

- Gemeinsames Bewerten, Strukturieren und Ordnen der Vorschläge.

Gemeinsam werden die Ideen inhaltlich bewertet. Dies kann anhand von Fragen geschehen wie: Was ist unsinnig? Was ist leicht, schwer, zu schwierig für uns? Welchen Ideen gehen wir nach? Was machen wir zuerst? Was dann? Was heben wir uns bis zum Schluss auf? Auf diese Weise entsteht ein Plan für das weitere Arbeiten.

- Versuch des Lösens ausgewählter Vorschläge.

Für die Bearbeitung der Variationen können recht unterschiedliche Sozialformen angemessen sein. Bei einem breiten Aufgabenspektrum bietet sich insbesondere arbeitsteiliges Herangehen in Gruppen an.

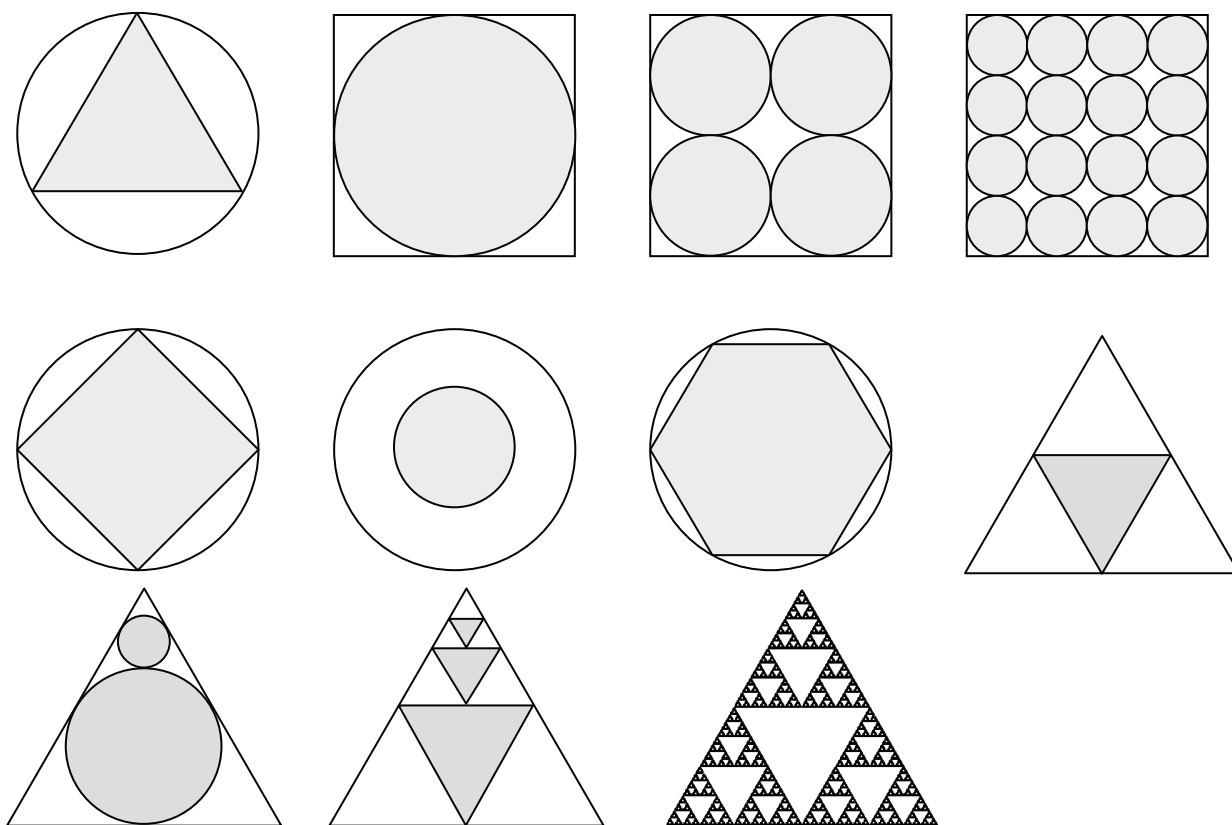
- Vorstellen der Lösungen,
- evtl. weitere Variationsvorschläge,
- evtl. Gesamtdarstellung aller Bemühungen.

Selbstverständlich mag eine Variationseinheit auch ganz anders verlaufen. Das Variieren *sollte* sogar anders geplant werden, wenn in einer Lerngruppe gewisse Arbeitsvoraussetzungen (argumentieren, einander zuhören, sich über einen größeren Stundenabschnitt hinweg konzentrieren können) nicht oder noch nicht gegeben sind. Dann empfiehlt sich ein eher „sanfter“ Einstieg: Der Lehrer führt hin und wieder explizit eine einzelne Variation (nicht die zugehörige Lösung) vor, damit die Schüler ein Gefühl für das Variieren gewinnen. So kann man allmählich zur ausgereiften Form hinfinden.

5. Weiteres Beispiel

In ein gleichseitiges Dreieck wird ein möglichst großer Kreis gezeichnet. Wie viel Prozent der Dreiecksfläche füllt die Kreisfläche aus?

Ideen für Variationen



Literatur

<http://sinus-transfer.de> → Module → Modul 1: Weiterentwicklung der Aufgabenkultur → Thema mit Variationen

Schupp, H.: Thema mit Variationen, Aufgabenvariation im Mathematikunterricht, Franzbecker, Hildesheim 2002